



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Caracterización de pulsos ultracortos
en la región focal de sistemas refractivos

Dra. Leonor García Martínez



Ciencia Nueva
Sistema de Posgrado UNAM

Dra. Martha Rosete Aguilar
Asesor

Agradecimientos

La gratitud es uno de los sentimientos más humanos y sinceros que existen, últimamente he experimentado este sentimiento de manera intensa, por lo que me siento profundamente emocionada y en deuda con la vida, por lo que quiero expresar los siguientes agradecimientos.

Doy gracias a la Dra. Martha Rosete Aguilar, quien confió en mí desde el primer día que me presente en su oficina y decidió ayudarme a concluir mis estudios de doctorado. Sin su ayuda, no hubiera podido llevar esto a cabo.

Agradezco a los doctores Neil Bruce, Jesús Garduño y Roberto Ortega por la aceptación y ayuda que me brindaron durante mi estancia en el CCADET.

Agradezco a mis sinodales Martha Rosete, Neil Bruce, Roberto Ortega, Víctor Romero Rochín, Alejandro Reyes Esqueda, Miguel García Rocha y Rubén Ramos García, por la revisión a este trabajo de tesis, que se ha visto enriquecido con sus comentarios.

Doy gracias por tener a mis padres, ya que gracias a ellos he podido tener la educación que tengo y la determinación que me ha llevado a concluir este trabajo de tesis, y a valorar el bien que hay en mi vida, por cuidarme tanto y siempre ayudarme. Doy gracias a la vida por la cantidad enorme de amor que he recibido de mi esposo Constantino, de mis hermanas Aida y Azucena, y por dejarme experimentar un amor tan profundo por mis sobrinos Valeria, Ximena, Ángel, Ian y Rudy. También por tener la amistad de Alfonso.

En este tiempo pude tener excelentes amigos, Cristtel sin duda es una pieza fundamental en este trabajo de tesis, sin ella no hubiera llegado a trabajar con la Dra. Martha Rosete. La lista de buenos amigos afortunadamente es larga y a ellos agradezco su compañía, los buenos momentos que pasamos y toda la ayuda que me han brindado. Cristtel, Laura, Ariadna y Juan, Mercedes, Selene, Lucía, Marusia y Francisco, Jorge y Ana, Jonathan, Eliut, Kike, Jeanette, Carla y Álvaro, Azalia, Olivia, Roberto Álvarez, Eleazar, Yanet, Verónica, Hugo, Cesar, Samuel, Hector, Horacio, Gustavo, Mauricio, Josué, Jacqueline, Ismael; Oli, Nay, Emma, Paty y Roberto Pineda. Todos ustedes han formado parte importante en mi vida y espero continúe así.

Agradezco a mis compañeros del CCADET, por lo buena compañía durante estos dos años. Dulce, Alejandro, Briseida, Sergio, Flor, Miguel, Fernando, Gabriel, Carlos Román, Dra. Martha Rosete, Dr. Neil Bruce, Dr. Jesús Garduño, Dr. Antonio, y Dr. Roberto

Ortega.

Agradezco la ayuda económica que me brindo CONACyT, durante mis primeros años del doctorado. También a DGAPA-UNAM (PAPIIT-IN101609-3), y toda la ayuda económica que de alguna manera llegó a mis manos, OSA Foundation, Educación a Distancia GDF, SEP, UNAM.

Agradezco a los profesores de la Universidad Nacional Autónoma de México que me han formado como profesionista, pero más que a todos ellos, a la Dra. Martha Rosete.

Resumen

En el presente trabajo se estudia el enfoque de pulsos de luz láser ultrarrápidos por sistemas ópticos refractivos usando la teoría de la difracción. Los sistemas ópticos estudiados son lentes simples, dobletes acromáticos y dobletes apocromáticos. Cada sistema refractivo produce dispersión. El ensanchamiento temporal del pulso producido por la dispersión de la velocidad de grupo o GVD se estudia desarrollando en serie de Taylor el número de onda en función de la frecuencia hasta el tercer orden. Se analiza el ensanchamiento temporal de los pulsos sólo por el efecto de tercer orden de GVD, así como el ensanchamiento temporal del pulso generado por la aberración cromática, efecto conocido como la diferencia del tiempo de propagación o PTD, y el ensanchamiento espacial del pulso generado por la aberración esférica de cada sistema. Se usan los segundos momentos del campo eléctrico, para determinar el ensanchamiento espacial y temporal del pulso al propagarse por la lente. Se define la calidad de la señal como el inverso del producto de estas dos cantidades. Para determinar el campo eléctrico del pulso en la región focal del sistema óptico es necesario calcular una integral sobre las frecuencias del pulso. Cuando se hace la aproximación de que el ancho de frecuencias es mucho menor que la frecuencia de la onda portadora y solo se expande el número de onda hasta el segundo orden, la solución de la integral es analítica. Si alguna de estas dos aproximaciones no se hace, la integral tiene que resolverse de forma numérica. Hemos usado el método de integración de Gauss-Legendre para calcular la integral sobre las frecuencias de forma numérica cuando se expande el número de onda hasta el tercer orden. Se hace un análisis del número de parámetros y anchos de banda asociados a cada pulso según su duración para usar de manera adecuada el método de integración de Gauss-Legendre y haciendo una expansión hasta el segundo orden del número de onda con respecto a la frecuencias, el resultado se compara con la solución analítica de la integral para verificar los resultados obtenidos con el método de Gauss-Legendre.

Usando los segundos momentos del campo eléctrico en espacio y tiempo, se obtiene una curva de la calidad de la señal a lo largo del eje óptico cerca de la región focal, para diferentes sistemas ópticos y para diferentes duraciones del pulso. La calidad de la señal da información de cómo los diferentes efectos que producen el ensanchamiento temporal y espacial del pulso reducen la intensidad pico del pulso respecto a la intensidad pico de

un pulso enfocado por un sistema ideal.

Se ha verificado la existencia de un segundo pulso. Este segundo pulso, que recibe el nombre de "boundary pulse", es generado por la difracción de pulsos en el borde de la lente y aparece sobre el eje óptico de la lente pero en posiciones alejadas de la vecindad del foco paraxial. Se estudia la difracción del campo sin la aproximación que el ancho de banda asociado al pulso es mucho menor a la frecuencia central de la onda portadora ($\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$). Este análisis es expuesto por primera vez en la literatura.

Summary

In the present work we study the focusing of ultrashort laser pulses by refractive optic systems by using diffraction theory. The optical systems are singlet lenses, achromatic doublets and apochromatic doublets. Each refractive system produces dispersion. The temporal spreading of the pulse produced by the group velocity dispersion or GVD is studied by expanding the wave number as function of the frequency in a Taylor series up to third order. We analyze the temporal spreading of the pulses generated by the third order of GVD effect only, as well as the temporal spreading due to the chromatic aberration, effect known as propagation time difference (PTD), and the spatial spreading due to the aberrations of the optical system. The second moments of the electric field are used to determine the space and temporal pulse widths. The quality of the signal is defined as the inverse of the product of these two quantities. In the calculation of the electric field of the pulse at the focal region of the optical system, an integral over frequencies has to be solved. Under the assumption that the bandwidth is smaller than the frequency of the carrier and by expanding the wave number in a Taylor series up to second order, the integral over frequencies has an analytical solution, otherwise the integral has to be solved numerically. The Gauss-Legendre quadrature method has been used to calculate the integral over the frequencies when the wave number is expanded up to third order. An analysis of the number of parameters and bandwidths associated to each pulse according to its duration has been done by using the Gauss-Legendre quadrature method and the expansion up to second order of wavenumber respect to the frequency. The results of this analysis are compared with the analytical solution of the integral to verify the numerical calculations given by the Gauss-Legendre method. By using the second moments of the electric field in space and time, a curve of the quality of the signal is obtained along the optical axis near the focal region for different optical systems and pulse durations. The quality of the signal gives information on how the different effects that produce temporal and spatial spreading of the pulse will decrease the peak intensity of the pulse as compared to the peak intensity of a pulse focused by an ideal optical system. The existence of a second pulse has been verified. This second pulse called boundary pulse is created by the diffraction of pulses at the edge lens and appears at positions far away from the paraxial focus of the lens. Finally, we study the diffraction of the field without the approximation that the bandwidth

associated to the pulse is much less than the wave of the carrier frequency $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$. This analysis is exposed for the first time in the literature.

Introducción

Desde el nacimiento del láser en el año de 1960 [1], la física y la ingeniería se han visto beneficiadas por tener una herramienta con las propiedades de coherencia característica del láser. La intensidad que se puede obtener de láseres pulsados aumenta considerablemente respecto a la emisión continua [2]. Por esta razón el conocimiento de los mecanismos físicos involucrados por los cuales se puede obtener luz pulsada de corta duración, ha sido uno de los pilares dentro del estudio teórico y experimental del láser [3]. Dentro del diseño experimental, se han desarrollado técnicas que permiten medir la duración temporal de los pulsos, como lo son la autocorrelación óptica [4–8], pues no es posible con la tecnología actual, tomar lecturas del orden de 10^{-15} segundos, debido al tiempo de respuesta de cualquier equipo electrónico. Sorprendentemente pulsos de láser de picosegundos (10^{-12} segundos) han sido posibles desde la mitad de los años setenta. Con la introducción de la técnica de amarre de modos [9], (donde los modos del láser se forzan a mantener la misma fase), el láser de titanio-zafiro y los láseres de fibra ultrarrápida ambos en 1990, permitieron la construcción de un sistema de estado sólido que requiere de cuidados mínimos. Debido a que los pulsos de láseres ultrarrápidos son ensanchados por la óptica, estos pueden llegar a perder su intensidad inicial, por lo que pocas veces se usan pulsos menores a 100fs en aplicaciones comerciales, dejando el tema de láseres pulsados menores a 100fs al campo de la investigación.

Mientras que para la escala de nanosegundos y picosegundos los sistemas ópticos se comportan como si ellos estuvieran siendo iluminados por luz monocromática [10], el uso de luz pulsada del orden de femtosegundos (1×10^{-15} s), trae nuevos efectos. Estos efectos han sido mostrados teóricamente y experimentalmente [11, 12, 15, 16], obteniéndose que el enfocamiento de pulsos de luz ultracorta por lentes con aberración cromática da al pulso un ensanchamiento temporal y un patrón de difracción modificado comparado con aquel formado por iluminación monocromática, lo que, por supuesto, disminuye la intensidad de los pulsos y afecta la operación de dispositivos ópticos, tales como son los microscopios de escaneamiento láser (LSM's), cuando son usados en conjunto con pulsos de luz de femtosegundos.

En este panorama, la generación, diagnóstico y aplicación de pulsos ultracortos, requieren elementos ópticos adecuados, esto quiere decir, elementos ópticos que no cambien

las características temporales y espaciales del pulso, o si lo llegan a hacer, entonces que lo hagan en una forma que sea comprendida, ya que en muchos experimentos los pulsos necesitan ser enfocados sobre el eje óptico para alcanzar altas intensidades, las cuales son obtenidas normalmente usando lentes.

Por la naturaleza de los pulsos de luz láser, estos tienen un ancho de banda asociado, por lo que la aberración cromática es un efecto importante, que provoca que los pulsos que tocan el borde de la lente, lleguen al plano focal un intervalo de tiempo $\Delta T'$ antes que aquellos que se propagan por el centro de la lente, este efecto es conocido como PTD por sus siglas en inglés (Propagation Time Difference). Otro efecto importante se obtiene del resultado de la dispersión que sufre la luz por los elementos ópticos, provocando una distorsión del pulso, debida a la dispersión de la velocidad de grupo por el material óptico, este efecto al que se le ha llamado GVD (Group Velocity Dispersion), cobra mayor importancia mientras la duración del pulso sea menor [13, 18]. El efecto de GVD de tercer orden, es un efecto de importancia para la calidad de la señal, para pulsos menores a 20fs [14, 22]. Por otra parte las aberraciones propias de la lente son un factor importante que modifica las características espaciales del pulso [19–21]. La calidad de la señal que se puede obtener del enfocamiento de luz pulsada, depende en gran medida del conocimiento y control de estos tres efectos [22] y de la posición sobre el eje óptico z en donde se coloque el detector.

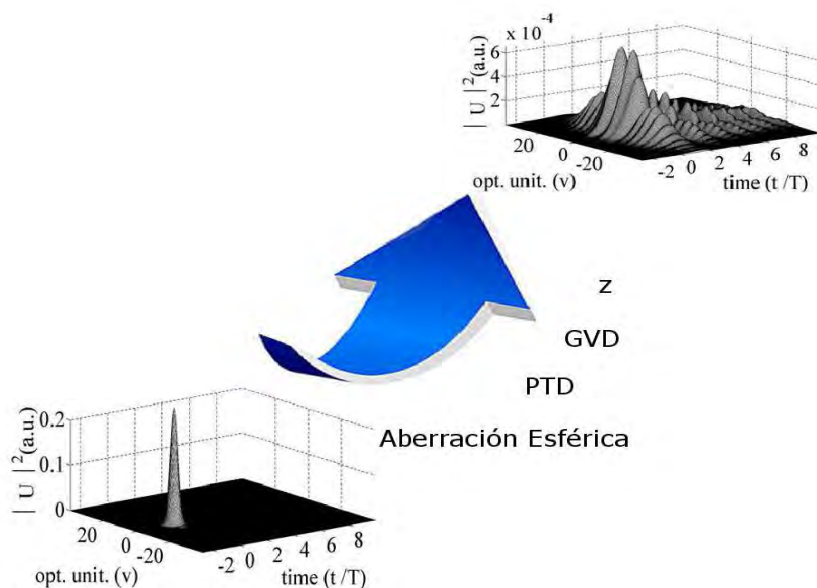


Figura 1: Pulso de luz deformado por los efectos de GVD, PTD y aberración esférica, cuando se propaga por una lente y se observa en una posición z diferente a la del foco paraxial.

El grupo de Marcos Dantus de la universidad de Michigan [23–27], ha investigado los conceptos teóricos del control de coherencia que han permitido obtener un láser de pulsos de femtosegundos que pueden ser caracterizados y compensados con ayuda de dispositivos

como el MIIPS (Multiphoton Intrapulse Interference Phase Scan) [17], con lo que ahora es posible tener pulsos con una duración de hasta 4.6fs [23]. La técnica consiste en medir la segunda derivada de la fase $\phi''(\omega)$ y con ayuda de un modelador de pulsos compensar la deformación sufrida por el pulso en tiempo real. Otras técnicas para la compresión de pulsos se han logrado con rejillas de difracción [53], chirp mirrors, fibras ópticas o pares de prismas [54], donde el pulso se propaga a través de estos elementos ópticos, para poder compensar la cantidad de chirp (el cambio en la frecuencia instantánea) que adquirió el pulso al propagarse a través de otro medio dispersivo.

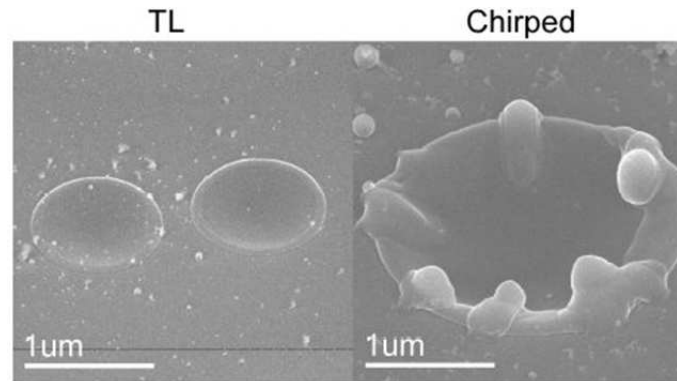


Figura 2: En la imagen se muestra la morfología de las características de micromaquinado obtenidas sobre una oblea de Si (100). El efecto de la forma del pulso sobre la morfología de perforación de hoyos, fue investigado usando dos pulsos de diferente duración. En este experimento, TL es un pulso sin chirp con una duración de 35fs y Chirped es un pulso de 1ps cuya duración se obtuvo introduciendo chirp al pulso. La condiciones experimentales de potencia y enfocamiento fueron los mismos excepto por la duración del pulso. Es claro que el pulso TL da características limpias comparado con pulsos con un chirp alto donde el derretimiento puede ser visto claramente.

Debido a la alta intensidad que se puede alcanzar con pulsos de luz láser, las aplicaciones que se han dado a estos pulsos son diversas, entre las que se encuentra el corte de tejido biológico con gran precisión [28–32], el tratamiento óptico de nanomateriales [33–35], la generación de plasmas [36, 37]. Debido a la duración de los pulsos, del orden de femtosegundos, ha sido posible introducir a los pulsos de láser en la espectroscopía ultrarrápida [38], así como en el estudio de la interacción de luz con la materia, donde ha sido posible estudiar procesos atómicos y moleculares con resoluciones temporales a escalas de tiempo de los procesos atómicos [39–41]. El micro-maquinado [42–44], es una de las aplicaciones en la industria donde los pulsos ultrarrápidos muestran dar ventajas sobre el modo continuo (CW) o sistemas de pulsos largos. Los pulsos ultrarrápidos (del orden de 1×10^{-15} s), en principio son capaces de ablación en un material, a una tasa que es más rápida que el fundido térmico de la muestra. Este estudio ha sido investigado desde 1980 [45]. Sin embargo, es posible causar derretimiento y otros indeseables resultados con láseres de pulsos ultracortos, es por esto que es importante determinar que tan cortos deben ser los pulsos para poder cortar sin derretir. El grupo de Dantus, ha encontrado que la eficiencia del corte y el umbral de ablación disminuyen conforme el ancho de banda

del pulso aumenta. Cuando un pulso de 35fs está limitado por su ancho de banda (TL), es decir, que el pulso no tiene chirp, es posible hacer cortes del orden de sub-micras de manera limpia, esto se puede observar en la morfología de micro-maquinado sobre una oblea de silicio, figura indicada con (TL), mientras que el corte que se obtiene con el láser de 1ps que no esta limitado en su ancho de banda, tiene defectos en sus bordes (Chirped), [23].

Otro campo que se ha visto beneficiado con el uso de pulsos ultracortos, es la microscopía de dos fotones. Los métodos que se emplean para la obtención de las imágenes, dependen de la habilidad de enfocar el láser en spots de tamaño muy pequeño, además mientras más corto sea el pulso la calidad en la imagen aumenta, por ejemplo, para pulsos de 100fs comparados con pulsos de 12fs, la señal aumenta 8 veces, lo que se puede observar en la figura 2, [23], donde se muestran tres imágenes de la misma sección de hígado de ratón, obtenidas con microscopía de dos fotones, la mejor imagen se obtiene con luz pulsada de 12fs, usando un objetivo apocromático. La ganancia en la señal es aproximadamente 8 veces mayor al usar pulsos de 12fs que para pulsos de 100fs.

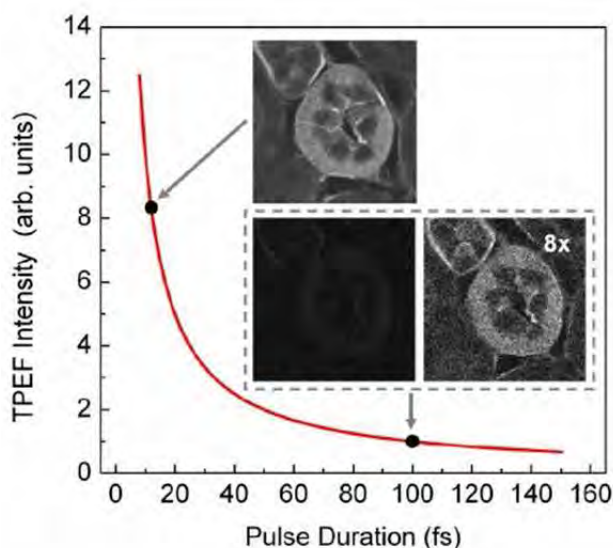


Figura 3: Se muestran tres imágenes de la misma sección de hígado de ratón, obtenidas con microscopía de dos fotones. Las imágenes se han obtenido con pulsos de láser de 12fs y 100fs, para la longitud de onda central de 810nm., mediante un objetivo Zeiss LD C Apocromático 40x/1.1 NA.

Los pulsos de láser que trataremos, se han estudiado en función del diseño de un láser pulsado, actualmente en fabricación en el laboratorio de pulsos ultracortos del CCADET, donde por la técnica de amarre de modos [46], se han podido obtener pulsos de 200fs con una longitud de onda central de 810nm y se desea alcanzar duraciones de 20fs [47].

El objetivo de este trabajo de tesis es determinar como el campo de un pulso de luz del orden de femtosegundos, es modificado por el efecto de la dispersión de velocidad de grupo (GVD) de tercer orden, el efecto de la diferencia del tiempo de propagación (PTD) y la aberración esférica producida por el sistema refractivo. Los sistemas refractivos

que se estudian son lentes simples, dobletes acromáticos y dobletes apocromáticos, cuyas aperturas numéricas están dentro del rango de 0.15 a 0.33. Los pulsos estudiados tienen una duración entre 4.5fs y 200fs. Los resultados mostrados son teóricos. Con base en este conocimiento podremos determinar las condiciones bajo las cuales se obtiene el valor más alto de la intensidad del pulso. El estudio del efecto de GVD de tercer orden, es presentado por primera vez en la literatura.

En el Capítulo 1, se presentan los conocimientos teóricos bajo los cuales se determina la difracción de un pulso de luz al propagarse por un sistema refractivo, también se mencionan las aproximaciones físicas que permiten abordar el problema. Se supone que sobre el sistema óptico (lentes simples o dobletes) el pulso de láser incide iluminando de manera uniforme, teniendo luz colimada que se propaga paralela al eje óptico de las lentes, por lo que el frente del pulso que incide sobre la lente es plano. Una iluminación homogénea sobre toda la lente es una condición deseable en microscopía, ya que la resolución espacial aumenta al iluminar toda la lente, esto quiere decir, que iluminando toda la lente se pueden obtener imágenes a escalas más finas. Los pulsos de luz se han modelado suponiendo que las frecuencias están moduladas por una Gaussiana. Otra aproximación importante es suponer que el ancho de banda asociado a un pulso, es una cantidad pequeña comparada con la frecuencia de la onda portadora del pulso con lo que ($\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$). Con esta última aproximación y realizando una expansión del número de onda respecto a la frecuencia, hasta el segundo orden, se llega a una expresión integral en espacio y en frecuencias, la integral en las frecuencias tiene una solución analítica en cambio para la coordenada en espacio, se debe resolver tomando un método numérico adecuado. En la presente tesis hemos analizado a los pulsos cuando se expande a tercer orden el número de onda, en cuyo caso la solución de la integral en las frecuencias debe resolverse con un método numérico, lo mismo que en la coordenada espacial. Cuando se expande hasta el tercer orden y se desprecia el término de segundo orden, sobre el pulso se tiene únicamente el efecto de GVD de tercer orden. La corrección del segundo orden de GVD, se puede obtener colocando un par de prismas en el trayecto del láser. En el análisis se expande en serie de Taylor el número de onda alrededor de la frecuencia central de la onda portadora. La expansión en serie de Taylor hace posible estudiar los efectos de PTD y GVD de manera independiente, lo que da la oportunidad de determinar cómo cada uno de estos efectos ensancha al pulso, indicando qué tipo de lente, de las estudiadas, proporcionará la mejor calidad de la señal.

En el Capítulo 2, se estudia el método de integración de Gauss-Legendre. Este método tiene dos ventajas importantes sobre el método de integración por rectángulos las cuales son: reducción en el tiempo de cálculo y reducción en los errores numéricos. El análisis del efecto de GVD de tercer orden que se expone en esta tesis, ha sido posible gracias al método de integración de Gauss-Legendre, el cual ha reducido el tiempo de cálculo en un 95% respecto al tiempo requerido con el método de integración de rectángulos. Los resultados que se expondrán en este trabajo hubieran sido prácticamente imposible si hubiésemos usado el método de rectángulos pues el tiempo de cálculo del campo del pulso difractado con el método de rectángulos es de aproximadamente 6 días (el cual aumenta aún más si se intenta disminuir el error numérico) y con el método de Gauss-Legendre el

tiempo de calculo es de 70 minutos. Sin embargo, el uso del método de Gauss-Legendre no es trivial, por lo que se mostrarán varios cálculos que nos permitirán probar la eficiencia y funcionalidad del método de Gauss-Legendre.

Una vez probada la efectividad del método de integración de Gauss-Legendre, en el Capítulo 3 se estudia el campo de un pulso difractado por lentes simples hechas del vidrio BK7, las cuales tienen diferentes diámetros pero la misma distancia focal. El estudio se basa en el trabajo reportado por Bor [48], donde se analiza la difracción de pulsos de luz que han sido enfocados por lentes simples de BK7 de diferentes diámetros y la misma distancia focal, considerando únicamente el efecto de PTD, los pulsos tienen una duración de 6fs ($T_{FWHM}=6\text{fs}$) y una longitud de onda de la portadora igual a 620nm. En este capítulo se extiende el estudio para tomar en cuenta el efecto de GVD de tercer orden y la aberración esférica de la lente. Para cada pulso difractado por el sistema óptico, se ha realizado un análisis del ensanchamiento temporal y espacial que sufre el pulso al ser enfocado, con ayuda de los segundos momentos del campo eléctrico, en una vecindad alrededor de la región focal, calculando el inverso de la multiplicación de estas dos cantidades, la cual hemos nombrado la calidad de la señal y mostramos que esta cantidad es una cantidad análoga a la intensidad del pulso.

En el Capítulo 4 estudiamos la calidad de la señal para dobletes acromáticos hechos de los vidrios LaK22 y SF6 (doblete comercial tomado del catálogo de Edmund [99]), con diferentes aperturas numéricas (0.15, 0.2, 0.24, 0.3 y 0.33), cuando por ellos se propaga un pulso de 10fs de duración. En el Capítulo 5, tomando el doblete acromático de apertura numérica de 0.15, se estudia el efecto de PTD, aberración esférica y de GVD de tercer orden, para pulsos de diferente duración. En busca de una mejora en la calidad de la señal, se diseñaron dobletes apocromáticos con apertura numérica de 0.15, los resultados se exponen en el Capítulo 6. Cabe señalar que los dobletes apocromáticos que se exponen, son diseño de la Dra. Martha Rosete.

Debido a la reducción en el tiempo de cálculo, hemos podido estudiar la calidad de la señal fuera de la zona paraxial. La calidad de la señal es un concepto que hemos introducido como medida de la desviación de un pulso enfocado por una lente ideal y una real. Cuando se analiza la calidad de la señal, podemos determinar la posición de señal máxima en la que esta ocurre y en la mayoría de los casos estudiados, hemos determinado que la señal máxima no se obtiene en la posición del foco paraxial, sino en una posición cercana a la lente. De los resultados obtenidos es claro que el efecto de GVD de tercer orden es un efecto importante para pulsos con duración menor a 20fs.

Dado que el ancho de banda de un pulso de luz es pequeño comparado con la frecuencia central del pulso, se puede tomar el límite que el ancho de banda asociado a un pulso determinado, es una cantidad pequeña comparada con la frecuencia de la onda portadora, $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$, lo cual reduce los cálculos en el estudio del campo difractado de los pulsos de luz láser, esta aproximación la podemos encontrar en todos los desarrollos hasta ahora expuestos en la literatura [10, 13, 22, 49–51].

El método de integración de Gauss-Legendre, nos ha permitido estudiar la calidad de la señal de los pulsos sin la aproximación $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$. En el Capítulo 7 se pueden ver

algunos resultados sin dicha aproximación, para diferentes sistemas refractivos de apertura numérica igual a 0.15 y para pulsos de 20fs. Con lo que hemos determinado que la aberración esférica de la lente provoca una calidad en la señal mayor que la predicha al considerar $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$.

En el Capítulo 8, se ha estudiado la difracción producida en el borde de la lente, lo que genera un pulso secundario sobre el eje óptico. Se verifica la expresión de Bor et.al. [52] para la posición del pulso secundario.

Los resultados obtenidos en los Capítulos 2, 5, 6 y 8, permitieron la publicación de un artículo en la revista Applied Optics [22], el cual se anexa al final del trabajo de tesis. Finalmente en el Capítulo 9, se presenta una discusión de los resultados obtenidos en esta Tesis. Al final de este capítulo se mencionarán los cálculos que aún están pendientes y que darán pauta a otros trabajos de investigación.

Por último en los Apéndices A y B se presentan los desarrollos numéricos que determinan el campo difractado del pulso en la región focal del sistema refractivo. En el Apéndice C se encuentran los datos de cada lente que ha sido estudiada. En el Apéndice D, se muestran las imágenes de algunos perfiles de intensidad de pulsos estudiados en el Capítulo 4.

Índice general

Índice general	XVII
1. Estudio de la propagación de pulsos ultracortos en lentes refractivas	1
1.1. Conceptos básicos sobre los pulsos de luz	1
1.2. Dispersión	6
1.3. Modelo de Sellmeier para el índice de refracción	9
1.4. Superposición de modos con fase constante y fase aleatoria	10
1.5. Número de modos que forman un pulso de luz láser	12
1.6. Criterios para la duración temporal de pulsos gaussianos	14
1.7. Aberraciones de Seidel	21
1.7.1. Aberración Esférica	24
1.8. Lente delgada como una transformación de fase	27
1.9. Dispersión de la velocidad de grupo (GVD)	31
1.10. Diferencia en el tiempo de propagación (PTD)	34
1.11. Transformación espacial y temporal de un pulso que ha pasado por una lente.	37
1.12. Segundos momentos, como medida del ensanchamiento espacial y temporal	43
2. Método de integración de Gauss-Legendre	45
2.1. Traslación del método de Gauss-Legendre	46
2.2. Análisis de parámetros	48
2.3. Análisis del la lente simple de BK7, $f=30\text{mm}$	54
3. Estudio de una lente simple de BK7	57
3.1. Análisis a segundo orden en la expansión del número de onda, con base en la solución analítica en la integral de las frecuencias	59
3.2. Análisis en base al método de integración de Gauss-Legendre	61
3.3. Análisis considerando tercer orden de GVD, PTD y Aberración Esférica	67
3.4. Análisis para $\lambda_0 = 810\text{nm}$ y $T_{int}=10\text{fs}$ y $T_{int}=20\text{fs}$.	70
3.4.1. Análisis considerando el tercer orden de GVD y PTD, para pulsos con duración de 10fs	71

3.4.2. Análisis considerando PTD, para pulsos con duración de 20fs	73
4. Pulsos de $T_{int}=10\text{fs}$, en la región focal de dobletes acromáticos (LaK22-SF6), con diferentes aperturas numéricas.	77
4.1. Doblete acromático de distancia focal $f_0=18\text{mm}$	80
4.2. Doblete acromático de distancia focal $f_0=20\text{mm}$	81
4.3. Doblete acromático de distancia focal $f_0=25\text{mm}$	82
4.4. Doblete acromático de distancia focal $f_0=30\text{mm}$	83
4.5. Doblete acromático de distancia focal $f_0=40\text{mm}$	84
4.6. Análisis general	85
5. Estudio del doblete acromático, LaK22-SF6, de distancia focal $f_0=40\text{mm}$, para pulsos de diferente duración	87
5.1. Análisis a segundo orden en la expansión del número de onda	89
6. Análisis de dobletes apocromáticos	97
6.1. Comparación de la calidad de la señal de los dobletes LaK22-SF6 y FK51-KzFSN2	107
7. Estudio de la difracción creada por el borde de la lente	111
8. Análisis de la aproximación $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$	119
9. Conclusiones	127
9.1. Trabajo a futuro	130
A. Análisis del campo cerca de la región focal, considerando la expansión del número de onda hasta segundo orden	133
B. Análisis del campo cerca de la región focal, considerando la expansión del número de onda hasta tercer orden	145
C. Características físicas de las lentes	157
D. Perfil de intensidad para los pulsos de 10fs que se han propagado por los dobletes acromáticos estudiados en el capítulo 4	159
D.1. Doblete acromático de distancia focal $f_0=18\text{mm}$	160
D.2. Doblete acromático de distancia focal $f_0=20\text{mm}$	166
D.3. Doblete acromático de distancia focal $f_0=25\text{mm}$	173
D.4. Doblete acromático de distancia focal $f_0=30\text{mm}$	179
D.5. Doblete acromático de distancia focal $f_0=40\text{mm}$	185
Bibliografía	191

Estudio de la propagación de pulsos ultracortos en lentes refractivas

En esta tesis estudiaremos pulsos de luz láser que han sido enfocados por algún tipo de sistema refractivo. Para comprender cada uno de los fenómenos que afectan a los pulsos en el trayecto dentro de estos sistemas, en este capítulo trataremos las características de la luz pulsada y algunas características de las lentes, como son las aberraciones. Comenzaremos por abordar las características principales de los pulsos de luz, la formación de dichos pulsos, la velocidad de fase y la velocidad de grupo, indicaremos el criterio para determinar la duración temporal de un pulso gaussiano. El estudio de las aberraciones de la lente, nos permitirá comprender el ensanchamiento espacial del pulso. Explicaremos el efecto producido por la diferencia del tiempo de propagación, conocido como PTD (Propagation Time Difference) así como el efecto de la dispersión de la velocidad de grupo (GVD por sus siglas en inglés Group Velocity Dispersion) que producen un ensanchamiento temporal al pulso y que provienen del hecho que la luz es pulsada. Dado que al pasar un pulso gaussiano por una lente, se pierde la forma gaussiana, estudiaremos como es posible determinar el ancho espacial y temporal de pulsos no gaussianos y como podemos determinar la calidad de la señal cerca de la región focal del sistema refractivo.

1.1. Conceptos básicos sobre los pulsos de luz

La propagación de pulsos de luz láser en medios lineales, puede modelarse en términos de la superposición de ondas planas de diferente frecuencia. Los pulsos de luz láser son paquetes de ondas electromagnéticas, por lo que están completamente descritas en tiempo y espacio por el campo eléctrico. Mediante ondas planas, que son solución de las ecuaciones de Maxwell, describiremos a los pulsos y los efectos que llegan a dispersarlo.

Las ecuaciones que describen la propagación del campo eléctrico y magnético, \vec{E} y \vec{H} , de una perturbación en un medio está descrita por las ecuaciones de onda de Maxwell:

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad \nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \quad (1.1)$$

donde $c = (\mu_0 \epsilon_0)^{-1/2}$ es la velocidad de la luz en el vacío. Cada componente del vector \vec{E} y \vec{H} satisface la ecuación escalar de onda:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (1.2)$$

donde la cantidad U puede ser cualquiera de las componentes del campo E_x, E_y, E_z, H_x, H_y y H_z . u es la velocidad con la que se propaga la componente U .

Si consideramos el caso especial en el que la variación espacial del campo ocurre en sólo una dirección, en particular en la dirección z , el operador ∇^2 se reduce a $\partial^2/\partial z^2$ y la ecuación de onda (1.2) se reduce a la ecuación de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{1}{u^2} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (1.3)$$

Por sustitución directa podemos verificar que la ecuación

$$U(z, t) = U_0 \cos(kz - \omega t) \quad (1.4)$$

es una solución a la ecuación (1.3) y de hecho es la ecuación de una onda armónica plana.

La manera más sencilla de crear una señal pulsada es superponiendo dos ondas planas en fase que viajan en la misma dirección y cuyas frecuencias y números de onda difieren ligeramente [65, 87]. Supongamos dos ondas planas viajando en la dirección z , cada una de ellas descrita por su número de onda k_1 y k_2 y su frecuencia ω_1 y ω_2

$$U_1(z, t) = U_{01} \cos(k_1 z - \omega_1 t + \varphi_1) \quad U_2(z, t) = U_{02} \cos(k_2 z - \omega_2 t + \varphi_2) \quad (1.5)$$

suponiendo que tienen la misma amplitud igual a U_0 y que ambas tienen fase inicial igual a cero ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$), la superposición de estas dos ondas es:

$$U(z, t) = U_0 [\cos(k_1 z - \omega_1 t) + \cos(k_2 z - \omega_2 t)] \quad (1.6)$$

usando la identidad:

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{1}{2}(\alpha + \beta) \cos \frac{1}{2}(\alpha - \beta) \quad (1.7)$$

la ecuación (1.6) se puede escribir como:

$$U(z, t) = 2U_0 \left[\cos \frac{1}{2}((k_1 + k_2)z - (\omega_1 + \omega_2)t) \cos \frac{1}{2}((k_1 - k_2)z - (\omega_1 - \omega_2)t) \right] \quad (1.8)$$

Si definimos, las cantidades $\bar{\omega}$ y \bar{k} , como la frecuencia angular promedio y el número de propagación promedio respectivamente, entonces estas cantidades son:

$$\bar{\omega} \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2) \quad y \quad \bar{k} \equiv \frac{1}{2}(k_1 + k_2), \quad (1.9)$$

similarmente las cantidades ω_m y k_m como la frecuencia de modulación y el número de propagación de modulación, como

$$\omega_m \equiv \frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2) \quad y \quad k_m \equiv \frac{1}{2}(k_1 - k_2) \quad (1.10)$$

entonces el campo eléctrico queda definido por:

$$U(z, t) = \underbrace{2U_0 \cos(k_m z - \omega_m t)}_{\text{onda envolvente}} \underbrace{\cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)}_{\text{onda portadora}} \quad (1.11)$$

La perturbación se puede considerar como una onda viajera de frecuencia $\bar{\omega}$ que tiene una amplitud modulada o variable en el tiempo $U_m(z, t)$ tal que

$$U(z, t) = U_m(z, t) \cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t) \quad (1.12)$$

donde

$$U_m(z, t) = 2U_0 \cos(k_m z - \omega_m t) \quad (1.13)$$

La frecuencia de modulación ω_m corresponde a la frecuencia de la envolvente de la curva. Si la onda portadora no estuviera modulada, entonces cada cresta de la portadora viajaría en la dirección positiva de la coordenada z , con la velocidad de fase usual

$$v \equiv -\frac{(\partial\varphi/\partial t)_z}{(\partial\varphi/\partial z)_t} \quad (1.14)$$

donde la fase se puede leer de la ecuación (1.12), i.e., $\varphi = (\bar{k}z - \bar{\omega}t)$, con ello, la velocidad de fase y por lo tanto, la velocidad de la onda portadora es [96]

$$v = \frac{\bar{\omega}}{\bar{k}} \quad (1.15)$$

En la figura (1.1) podemos ver a la onda portadora $U'(z, t) = \cos(\bar{k}z - \bar{\omega}t)$ en un instante de tiempo a la distancia z , también se observa a la onda un cierto tiempo Δt después, como $U'(z, t + \Delta t)$, esta última curva se desplaza en la dirección positiva de las z por una distancia $\Delta z = v \Delta t$, la cual es la distancia entre cualesquiera dos puntos cuyas fases se corresponden, digamos los puntos PP' . Ésta es la razón por la que la velocidad v es conocida como la velocidad de fase.

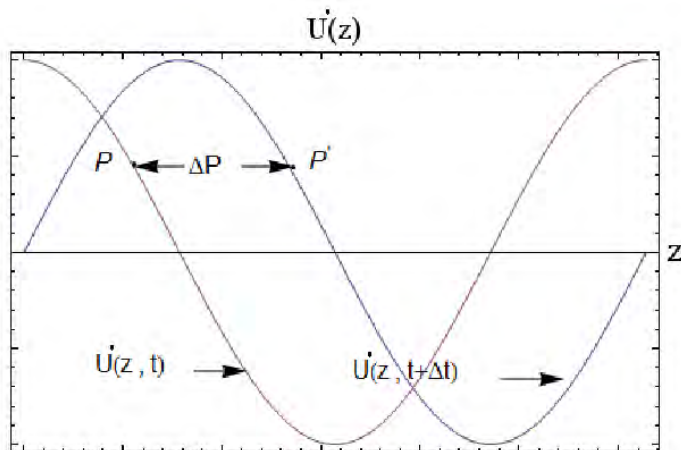


Figura 1.1: Gráfica de U' vs. z al tiempo t y $t + \Delta t$ posterior. (U' campo de la onda portadora).

Por otra parte, la envolvente de la onda se desplaza con una velocidad diferente, conocida como la velocidad de grupo, v_g . De la ecuación (1.11), se tiene que la envolvente de modulación es

$$U_m(x, t) = 2U_0 \cos(k_m x - \omega_m t) \quad (1.16)$$

a partir de la definición (1.14), la velocidad con la que avanza la envolvente esta dada por

$$v_g = \frac{\omega_m}{k_m} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad (1.17)$$

cuando estas diferencias son infinitesimales, la velocidad de grupo queda definida por la derivada de la frecuencia respecto al número de onda [75–77]

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (1.18)$$

por lo tanto, la velocidad de la onda envolvente puede ser diferente a la velocidad de la onda portadora. Esta diferencia de velocidades es fundamental en el estudio del ensanchamiento de pulsos al propagarse en medios dispersores.

Considerando la relación de dispersión $\omega = kv$ (que de manera general: $|\vec{k}| = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$), podemos derivar respecto a k , de lo que obtenemos la siguiente relación:

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dk} &= v \frac{dk}{dk} + k \frac{dv}{dk} \\ v_g &= v + k \frac{dv}{dk} \end{aligned} \quad (1.19)$$

Por lo que hemos obtenido la relación entre la velocidad de fase v y la velocidad de grupo v_g . Para medios que no son dispersores, tal que $dv/dk = 0$ entonces la velocidad de fase y la velocidad de grupo son iguales, $v_g = v$. En todo medio óptico la velocidad de fase

v es una función de la frecuencia angular, este es el fenómeno conocido como dispersión, donde el índice de refracción es función de la frecuencia. La dispersión es responsable de la separación de la luz blanca en sus componentes al pasar por un prisma, la imagen de este fenómeno lo ubicamos bien, por el famoso experimento de Newton.

A partir de la relación de dispersión $\omega = vk$, y considerando que en un medio el índice de refracción está definido como la razón de la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en un medio, $n = c/v$, entonces tenemos la siguiente relación

$$\omega = kv = \frac{kc}{n} \quad (1.20)$$

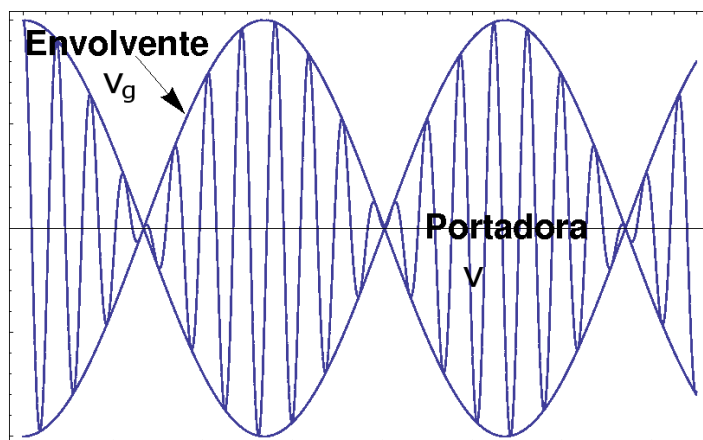


Figura 1.2: Se muestra la onda portadora modulada por la onda envolvente. La onda envolvente viaja a la velocidad de grupo v_g , mientras que la onda portadora se desplaza con la velocidad de fase v .

En medios dispersores, la velocidad con la que viaja una onda por estos medios, depende de la longitud de onda y por lo tanto, el índice de refracción es diferente para diferentes longitudes de onda. Así que, en general n es una cantidad que depende de λ , o del número de onda $k = 2\pi/\lambda$, i.e., $n = n(k)$, más adelante estudiaremos el modelo de Sellmeier, el cual nos permitira conocer el valor del índice de refracción como función de k . Conociendo $n = n(k)$ y de la relación de dispersión (1.20), podemos derivar respecto al número de onda, con lo que obtenemos la siguiente relación [93]

$$\begin{aligned} \frac{d\omega}{dk} &= \frac{c}{n} \frac{dk}{dk} - \frac{kc}{n^2} \frac{dn}{dk} \\ v_g &= \frac{c}{n} \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right) \\ v_g &= v \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right) \end{aligned} \quad (1.21)$$

De nuevo hemos encontrado la relación entre la velocidad de grupo v_g y la velocidad de fase v , ahora en función del cambio del índice de refracción con el número de onda. De

manera natural se define el índice de refracción de grupo, como

$$n_g \equiv \frac{c}{v_g} \quad (1.22)$$

1.2. Dispersión

Cuando un dieléctrico se somete a un campo eléctrico, la distribución de cargas de las nubes electrónicas del dieléctrico se distorsionan por la influencia del campo \vec{E} , tal que hay una separación de las cargas positivas y negativas en el medio, generando momentos eléctricos dipolares. El momento dipolar resultante por unidad de volumen se denomina la polarización eléctrica, \vec{P} . Para la mayor parte de los materiales \vec{P} y \vec{E} son proporcionales y se pueden relacionar por

$$(\epsilon - \epsilon_0)\vec{E} = \vec{P}, \quad (1.23)$$

donde ϵ_0 es la permitividad del vacío ($\epsilon_0 = 8,8542 \times 10^{-12} C^2 N^{-1} m^{-2}$) y ϵ la permitividad eléctrica del medio. La permitividad de un material se puede expresar en términos de ϵ_0 como

$$\epsilon = K_e \epsilon_0 \quad (1.24)$$

donde K_e es la constante dieléctrica o permitividad relativa, es una constante sin dimensiones.

Un modelo sencillo de un dieléctrico es aquel que considera a los electrones exteriores o de valencia ligados a sus átomos o moléculas por una fuerza elástica restauradora [65], que es proporcional al desplazamiento x de los electrones del punto de equilibrio ($m_e \omega_n^2 x$), donde ω_n es la frecuencia natural del oscilador. El átomo se parece así a un oscilador armónico forzado clásico. Si sobre el dieléctrico incide un campo eléctrico $\vec{E}(t)$ que se aplica en la dirección x , la fuerza F_E ejercida sobre un electrón de carga e por el campo de una onda armónica de frecuencia ω , se puede expresar como

$$F_E = eE(t) = eE_0 \cos \omega t \quad (1.25)$$

De la segunda ley de Newton se tiene la ecuación de movimiento

$$eE_0 \cos \omega t - m_e \omega_n^2 x = m_e \frac{d^2 x}{dt^2} \quad (1.26)$$

La solución a este problema esta dado por

$$x(t) = \frac{e}{m_e(\omega_n^2 - \omega^2)} E_0 \cos \omega t \quad (1.27)$$

Sin la fuerza aplicada por el campo, el electrón oscilará con la frecuencia natural ω_n .

El momento dipolar que esta definido por la carga multiplicada por el desplazamiento, si hay N electrones contribuyendo por unidad de volumen, la polarización eléctrica es

$$P = exN \quad (1.28)$$

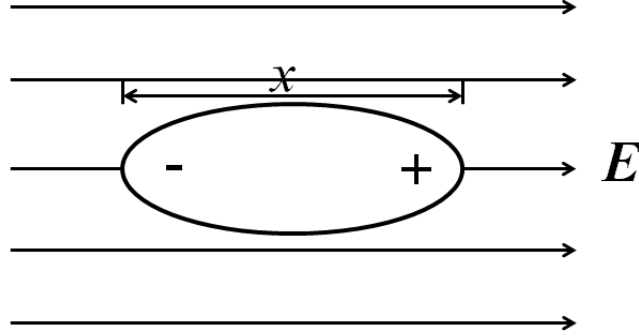


Figura 1.3: Distorsión de la nube electrónica en respuesta a un campo aplicado \vec{E} .

Sustituyendo x , se obtiene

$$P = \frac{e^2 N E(t)}{m_e(\omega_n^2 - \omega^2)} \quad (1.29)$$

De la ecuación (1.23), la permitividad eléctrica del medio esta determinada por

$$\epsilon = \epsilon_0 + \frac{P(t)}{E(t)} = \epsilon_0 + \frac{e^2 N}{m_e(\omega_n^2 - \omega^2)} \quad (1.30)$$

Por otra parte, el índice de refracción de un medio, esta determinado por la razón entre las velocidades de una onda electromagnética en el vacío y en la materia. Siendo que en el vacío la velocidad de la luz esta dada por $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ y en el medio por $\sqrt{\epsilon \mu}$. Donde μ_0 es la permeabilidad del vacío definida por $4\pi \times 10^{-7} N s^2 C^{-2}$ y μ la permeabilidad del medio particular.

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (1.31)$$

A excepción de los materiales ferromagnéticos, para la mayoría de las sustancias $\mu \approx \mu_0$, por ejemplo, para el diamante $\mu/\mu_0 \approx 0,999978$, por lo que se puede aproximar al índice de refracción de un medio por

$$n^2 \approx \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \quad (1.32)$$

Sustituyendo (1.30) en (1.32), llegamos a la expresión

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m_e} \left(\frac{1}{\omega_n^2 - \omega^2} \right) \quad (1.33)$$

A esta expresión se le conoce como la ecuación de dispersión. Haciendo los cambios apropiados se puede encontrar $n(\lambda)$. En el modelo se ha supuesto una sola frecuencia natural ω_n , pero si hay N moléculas por unidad de volumen, cada una con f_j osciladores que tienen frecuencias naturales ω_{nj} , donde $j = 1, 2, 3, \dots$ en este caso

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{N e^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_{j=1} \left(\frac{f_j}{\omega_{nj}^2 - \omega^2} \right) \quad (1.34)$$

Ahora ω_{nj} serían las frecuencias características a las cuales un átomo puede absorber o emitir energía radiante. En un modelo cuántico f_j son las probabilidades de transición atómica.

En el modelo dado por (1.33), no se han considerado los efectos de amortiguamiento, si se consideran, en la ecuación de movimiento aparecería un termino proporcional a la velocidad $\gamma dx/dt$. La solución (1.33) se ve modificada como

$$n^2(\omega) = 1 + \frac{Ne^2}{\epsilon_0 m_e} \sum_{j=1} \left(\frac{f_j}{\omega_{nj}^2 - \omega^2 + i\gamma_j \omega} \right) \quad (1.35)$$

Los sólidos sin color como los vidrios ópticos con los que se trabajará en esta tesis, tienen frecuencias naturales mayores a las del visible, en el ultravioleta. En los casos en los que $\omega_{nj}^2 \gg \omega^2$ entonces ω puede ser despreciada de (1.33) dando un índice de refracción esencialmente constante en esa región. Cuando ω aumenta a ω_{nj} , entonces $(\omega_{nj}^2 - \omega^2)$ disminuye y n aumenta gradualmente con la frecuencia, a este efecto se llama dispersión normal. En la región ultravioleta, cuando ω se aproxima a una frecuencia natural, los osciladores comenzarán a resonar y habrá una absorción de energía de la onda incidente. Cuando $\omega_{nj} = \omega$, el término de amortiguamiento que aparece en la ecuación (1.35), se hace dominante, las regiones cercanas a ω_{nj} mostradas en la figura (1.7a) son llamadas bandas de absorción, en estas bandas $dn/d\omega$ es negativa y se dice que el proceso es dispersión anómala. Todas las sustancias poseen bandas de absorción en alguna región del espectro electromagnético.

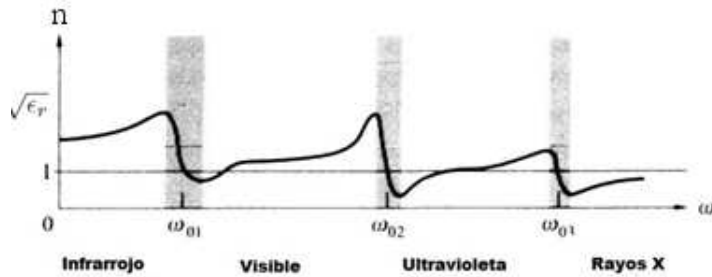


Figura 1.4: Índice de refracción vs la frecuencia. Se muestran las bandas de absorción.

Por lo tratado en la sección anterior, sabemos que la velocidad de fase v y la velocidad de grupo v_g , están relacionadas por la ecuación

$$v_g = v \left(1 - \frac{k}{n} \frac{dn}{dk} \right) \quad (1.36)$$

Para la región donde el valor dn/dk es positivo, i.e., en la región de dispersión normal, la velocidad de grupo es menor a la velocidad de fase [79]. En cambio para la región de dispersión anómala $dn/dk < 0$ por lo que $v_g > v$ [87].

En el caso en el que la velocidad de fase o el índice de refracción no cambia con la frecuencia, la velocidad de fase y de grupo son las mismas, en particular en el vacío

$$v_g = v = c. \quad (1.37)$$

1.3. Modelo de Sellmeier para el índice de refracción

A partir de la teoría clásica de dispersión, se puede hacer un modelo del índice de refracción de fase como función de la longitud de onda, esta es la fórmula de Sellmeier, [81]. Donde se supone que el medio contiene partículas limitadas por fuerzas elásticas, las cuales pueden vibrar con una frecuencia natural ω_0 , lo que indica que en ausencia de una fuerza periódica, las partículas vibrarían con una frecuencia ω_0 . El paso de ondas de luz a través del medio pone en acción una fuerza periódica sobre las partículas, que causa que estas vibren. Si la frecuencia de la onda de luz es ω , diferente a ω_0 , las vibraciones serán forzadas a la frecuencia ω y la respuesta será pequeña, en cambio, cuando la frecuencia de la luz es ω_0 , la respuesta de las partículas será grande, y el sistema estará en resonancia. Este modelo matemático lo propuso Sellmeier en 1871, donde el índice de refracción está determinado por la siguiente ecuación

$$n^2(\lambda_0) = 1 + \frac{B_1 \lambda_0^2}{\lambda_0^2 - C_1} + \frac{B_2 \lambda_0^2}{\lambda_0^2 - C_2} + \frac{B_3 \lambda_0^2}{\lambda_0^2 - C_3} \quad (1.38)$$

donde λ_0 es la longitud de onda asociada a la frecuencia natural de vibración de las partículas y tiene unidades de micras, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2 y C_3 son constantes las cuales están calculadas para cada vidrio y se encuentran en catálogos de vidrios ópticos, tal como el catálogo de Schott (Optical Glass) [97], estos valores son evaluados a partir de los índices de refracción medidos experimentalmente. Los valores de los coeficientes B 's y C 's, se encuentran en el apéndice C, para los vidrios que se utilizan en esta tesis.

Dado que la frecuencia está relacionada con la longitud de onda por la relación:

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \quad (1.39)$$

la derivada respecto a la frecuencia, está relacionada con la derivada respecto a la longitud de onda:

$$\frac{d}{d\omega} = \frac{d}{d\left(\frac{2\pi c}{\lambda}\right)} = \frac{d}{-\frac{2\pi c}{\lambda^2} d\lambda} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{d}{d\lambda} \quad (1.40)$$

La segunda derivada se obtiene con la expresión:

$$\frac{d^2}{d\omega^2} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{d}{d\omega} \right) = \frac{d}{d\omega} \left(-\frac{\lambda^2}{2\pi c} \frac{d}{d\lambda} \right) = \frac{\lambda^2}{(2\pi c)^2} \left(\lambda^2 \frac{d^2}{d\lambda^2} + 2\lambda \frac{d}{d\lambda} \right) \quad (1.41)$$

Y la tercer derivada queda expresada

$$\frac{d^3}{d\omega^3} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{d^2}{d\omega^2} \right) = -\frac{\lambda^3}{(2\pi c)^3} \left(\lambda^3 \frac{d^3}{d\lambda^3} + 6\lambda^2 \frac{d^2}{d\lambda^2} + 6\lambda \frac{d}{d\lambda} \right) \quad (1.42)$$

Estas derivadas se encuentran en el análisis del campo del pulso al propagarse por la lente, en los parámetros a_1 , a_2 y a_3 , los cuales estan definidos a continuación:

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{n_0} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \\ a_2 &\equiv \frac{1}{\omega_0 n(\omega_0)} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2n(\omega_0)} \frac{d^2 n(\omega)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} \\ a_3 &\equiv \frac{1}{2\omega_0 n(\omega_0)} \frac{d^2 n(\omega)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{6n(\omega_0)} \frac{d^3 n(\omega)}{d\omega^3} \Big|_{\omega=\omega_0} \end{aligned} \quad (1.43)$$

La descripción completa del campo del pulso y de como se modifica al propagarse por la lente, se encuentra en los apéndices A y B.

1.4. Superposición de modos con fase constante y fase aleatoria

En general el campo eléctrico emitido por un láser de pulsos se puede escribir como la superposición de ondas planas [84], como se describe en la siguiente ecuación:

$$U(t) = \sum_n E_n \exp i[(\omega_0 + n\omega)t + \phi_n] \quad (1.44)$$

donde ω_0 es la frecuencia de la onda portadora. La suma se hace sobre los modos de oscilación proporcionados por el medio activo, como lo puede ser un cristal de titanio-zafiro, dentro del rango de frecuencias $\Delta\omega$, ϕ_n corresponde a la fase del n -ésimo modo.

Cuando las fases ϕ_n , asociadas a cada onda plana, son iguales para algún tiempo, digamos para el tiempo $t = 0$, tal que la diferencia de fase entre ellos es cero, la superposición de estos campos es una señal pulsada. En este caso se dice que los modos estan amarrados [88].

A continuación en la figura (1.5), se superponen tres campos eléctricos, el resultado de ésta superposición es el campo U_{Total} , del cual se obtiene el perfil de intensidad $I(t)$, al elevar al cuadrado el campo resultante de la superposición. Cuando la diferencia de fase es igual a cero en el tiempo $t = 0$, se obtiene un perfil de intensidad pulsado. En cambio, para el caso en el que las fases de los campos ϕ_n , sea aleatoria para todo tiempo, de tal forma que la diferencia de fase es distinta de cero para cualquier tiempo, la señal obtenida no será pulsada, lo que se aprecia en la figura (1.6).

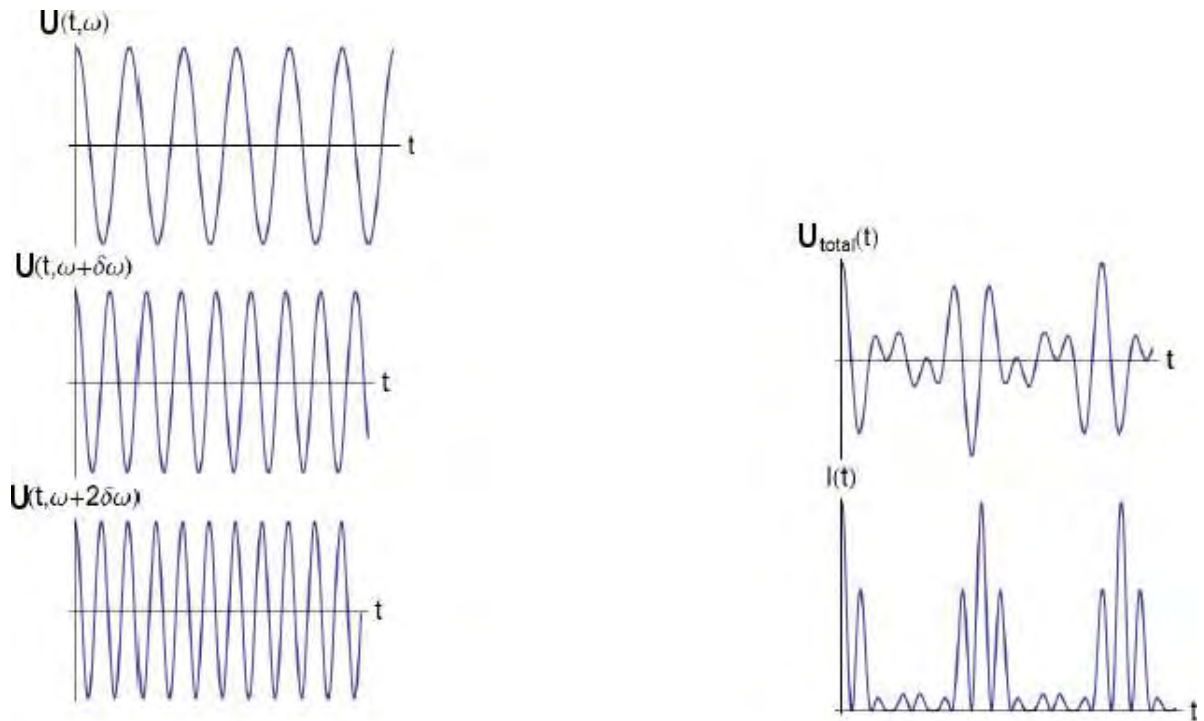


Figura 1.5: Como resultado de la superposición de los campos cuya diferencia de fase es igual a cero para algún tiempo, se crean pulsos definidos en el perfil de intensidad.

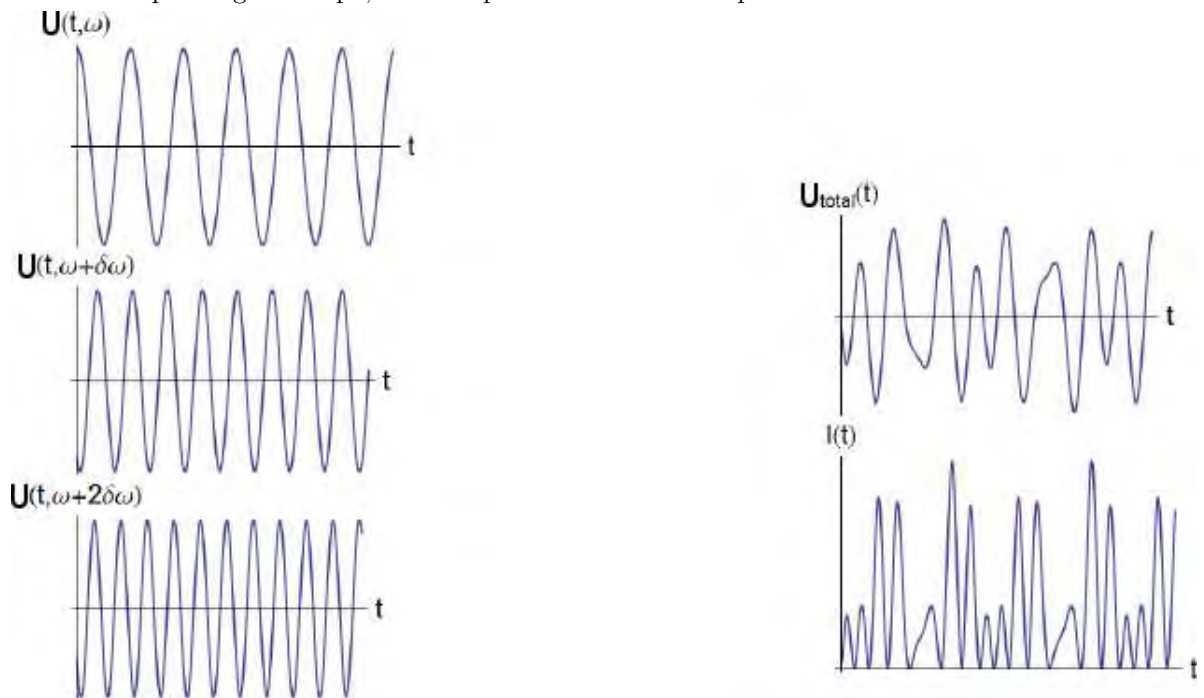


Figura 1.6: Como resultado de la superposición de campos que a cualquier tiempo, tienen una diferencia de fase diferente de cero, el perfil de intensidad es aleatorio y no muestra señales pulsadas.

1.5. Número de modos que forman un pulso de luz láser

De manera experimental, es posible obtener luz pulsada de un láser mediante la técnica de *amarre de modos*, donde se fuerza a que los modos oscilantes del láser, mantengan una fase constante. Con esta técnica se pueden crear pulsos desde 10^{-12} s o picosegundos hasta 10^{-15} s o femtosegundos [46]. El amarre de modos puede generar un tren de pulsos con una separación regular [67]. El láser de titanio zafiro (*Ti : Al₂O₃*) es el cristal más utilizado para la generación de pulsos de femtosegundos, por ser uno de los cristales con mayor ancho de banda de ganancia [82].

El campo resultante (1.44), describe una señal pulsada mientras las fases ϕ_n sean fijas i.e. sean iguales a una constante, en el caso de que esas constantes sean iguales a cero, el campo de un pulso de luz se puede describir como [84]:

$$U(t) = \sum_n E_n \exp i[(\omega_0 + n\omega)t] \quad (1.45)$$

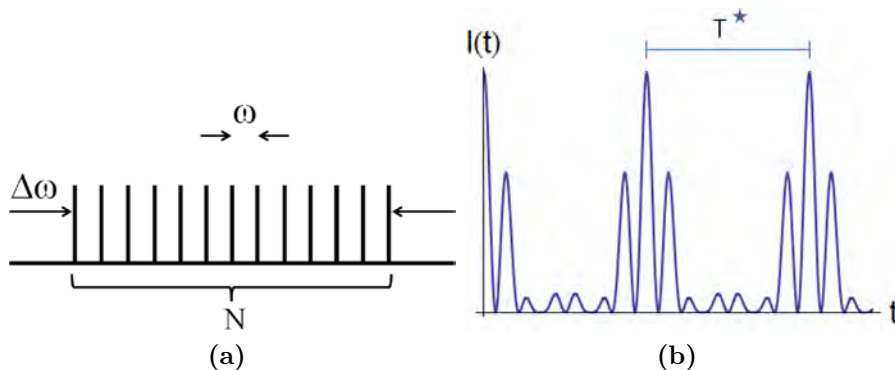


Figura 1.7: En (a) se observan N-modos de oscilación de un láser, para un pulso de ancho de banda $\Delta\omega$, con una frecuencia de repetición ω , en (b) el período de repetición T^* entre los pulsos.

Esta señal, es una señal que se repite como se puede ver en la figura (1.5), formando un tren de pulsos. El período de repetición esta dado por

$$T^* = \frac{2\pi}{\omega^*} \quad (1.46)$$

Donde ω^* es la frecuencia de repetición de la señal pulsada.

El ancho temporal de cada pulso que se define como el tiempo entre el pico y el primer cero en el perfil de intensidad, esta dado por

$$\tau = \frac{T^*}{N} \quad (1.47)$$

Por otra parte, la duración temporal esta dada por $\tau = 1/\Delta\nu$, donde $\omega = 2\pi\nu$, entonces N puede aproximarse a [84, 85]

$$N \approx \frac{\Delta\omega}{\omega^*} \quad (1.48)$$

esto es la razón entre el ancho de banda asociado al pulso y la frecuencia de espaciamento entre los pulsos.

En el laboratorio de pulsos ultracortos del CCADET se generan pulsos con una tasa de repetición de 76MHz, equivalente a una frecuencia de $\omega^* \approx 477\text{MHz}$.

Para pulsos de duración de $\tau = 100\text{fs}$, el ancho de frecuencias asociado considerando que las frecuencias que forman el pulso, están moduladas por una función rectangular, i.e., frecuencias de igual amplitud como las que se muestran en la figura (1.7a), es $\Delta\omega \approx 2\pi/\tau \approx 6.28 \times 10^{13}\text{Hz}$, por lo que el número de modos que forman al pulso esta determinado por

$$N = \frac{\Delta\omega}{\omega^*} \approx 131,579 \quad (1.49)$$

Para un pulso de 10fs, este valor incrementa a 1,315,789, por lo que para la escala de tiempos de femtosegundos, la suma de ondas planas puede ser reemplazada por una integral.

En el caso en el que la modulación de las frecuencias que forman al pulso, sea por medio de una modulación gaussiana, la relación entre el ancho en frecuencias y la duración del pulso τ esta determinado por $\Delta\nu\Delta\tau = 0.44$, [82, 85]. Con esta relación, se puede calcular el ancho asociado en frecuencias dada una duración del pulso. Por ejemplo para 10fs, el ancho de banda asociado es de $\Delta\omega = 2.76 \times 10^{14}\text{Hz}$, y el número de modos que forman al pulso es $N = 579,582$.

La amplitud escalar $U(z, t)$ puede ser entendida como una de las componentes del vector del campo electromagnético. Si $A(k)$ denota la amplitud de la componente de la onda plana con vector de onda k el pulso puede ser descrito como

$$U(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(k)e^{i(\omega(k)t - kz)} dk \quad (1.50)$$

Esta expresión satisface las ecuaciones de Maxwell, dado que el integrando es la solución de onda plana básica de la misma ecuación. Tomando a $U(z, t)$ en un tiempo dado, digamos $t = 0$, entonces $A(k)$ es formalmente la transformada de Fourier de $U(z, 0)$. Nos referiremos por consiguiente a $|A(k)|^2$ como el espectro de Fourier del campo $U(z, t)$. Si la densidad de energía electromagnética de un pulso de luz láser se asocia con el valor absoluto de la amplitud al cuadrado, entonces la velocidad de grupo representa el transporte de la energía.

Un resultado importante es que el ancho temporal del pulso es independiente del número de modos de oscilación contenidos en $\Delta\omega$ [85]. Esto permite contemplar un número menor de modos a los obtenidos de la ecuación (1.49), para el cálculo numérico, de tal manera que se reduce el tiempo de computo.

1.6. Criterios para la duración temporal de pulsos gaussianos

Los pulsos de láser son paquetes de ondas electromagnéticas y por ello, pueden definirse sin ambigüedad en espacio y en tiempo, ya que pueden ser caracterizados por las cantidades relacionadas con el campo eléctrico [3, 82].

Consideremos un pulso con una envolvente gaussiana $e^{-\alpha t^2}$ que se propaga en un medio dispersivo con una frecuencia de la onda portadora igual a ω_0 . El modelo de envolvente gaussiana, es una buena aproximación a los pulsos que se pueden obtener experimentalmente en el laboratorio de pulsos ultracortos del CCADET, como se puede ver en la figura (1.8), donde se muestra la señal de un pulso obtenida en el laboratorio y la curva gaussiana que se aproxima a dicha señal.

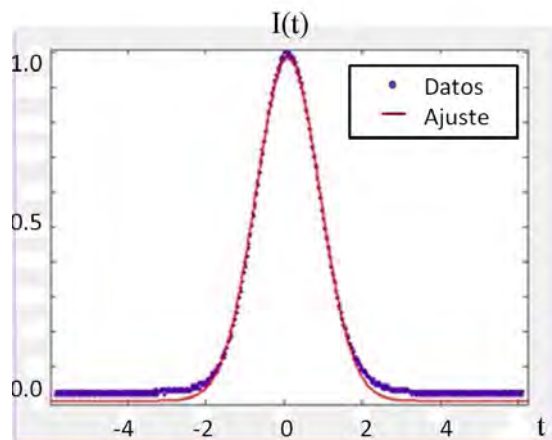


Figura 1.8: Perfil de intensidad de un pulso obtenido en el laboratorio de pulsos ultracortos del CCADET (línea punteada). Ajuste gaussiano (línea continua).

El pulso de entrada puede definirse en el plano $z = 0$, de la siguiente forma, [83]

$$\begin{aligned} U(z = 0, t) &= e^{-\alpha t^2} e^{i\omega_0 t} \\ &= e^{i\omega_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} F(\Omega) e^{i\Omega t} d\Omega \end{aligned} \quad (1.51)$$

donde $F(\Omega)$ es la transformada de Fourier de la envolvente $e^{-\alpha t^2}$, dada por

$$F(\Omega) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}} e^{-\frac{\Omega^2}{4\alpha}} \quad (1.52)$$

El espectro de frecuencias se ha tomado como una distribución gaussiana centrada en ω_0 , $\Omega = \omega - \omega_0$. El campo a la distancia z , se obtiene multiplicando cada una de las

componentes de frecuencia $(\omega_0 + \Omega)$ de la ecuación (1.51) por la exponencial $\exp[-i\beta z]$, donde $\beta = \beta(\omega_0 + \Omega)$ expandimos $\beta(\omega_0 + \Omega)$ alrededor de ω_0 , hasta el segundo orden:

$$\beta(\omega_0 + \Omega) = \beta(\omega_0) + \left. \frac{d\beta}{d\omega} \right|_{\omega_0} \Omega + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2\beta}{d\omega^2} \right) \Omega^2 \quad (1.53)$$

se obtiene que el campo puede expresarse como

$$E(z, t) = e^{i(\omega_0 t - \beta_0 z)} \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega F(\Omega) \exp \left\{ i \left[\Omega t - \frac{\Omega z}{v_g} - \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) \Omega^2 z \right] \right\} \quad (1.54)$$

donde

$$\beta_0 \equiv \beta(\omega_0), \quad \frac{d\beta}{d\omega} = \frac{1}{v_g} = \frac{1}{\text{velocidad de grupo}} \quad (1.55)$$

La envolvente del campo esta dada por la integral

$$\varepsilon(z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega F(\Omega) \exp \left\{ i\Omega \left[\left(t - \frac{z}{v_g} \right) - \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) \Omega z \right] \right\} \quad (1.56)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} d\Omega F(\Omega) \exp \left\{ i\Omega \left[\left(t - \frac{z}{v_g} \right) - a\Omega z \right] \right\} \quad (1.57)$$

donde:

$$a \equiv \frac{1}{2} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) = -\frac{1}{2v_g} \frac{dv_g}{d\omega} \quad (1.58)$$

Después de sustituir $F(\Omega)$ de la ecuación (1.52), la ecuación (1.56) se puede escribir como

$$\varepsilon(z, t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ - \left[\Omega^2 \left(\frac{1}{4\alpha} + ia z \right) - i\Omega \left(t - \frac{z}{v_g} \right) \right] \right\} d\Omega \quad (1.59)$$

Haciendo la integración se obtiene

$$\varepsilon(z, t) = \frac{1}{\sqrt{1 + i4a\alpha z}} \exp \left[-\frac{(t - z/v_g)^2}{1/\alpha + 16a^2 z^2 \alpha} \right] \exp \left[i \frac{4a z (t - z/v_g)^2}{1/\alpha^2 + 16a^2 z^2} \right] \quad (1.60)$$

Esta expresión nos indica el campo ε en la posición z al tiempo t . Para determinar la duración temporal del pulso, se puede considerar el criterio FWHM (Full Width at Half Maximum), [66, 74], que consiste en tomar 2 veces el ancho temporal medido del perfil de intensidad ($\varepsilon(z, t)\varepsilon^*(z, t)$) a la mitad de su valor máximo, igualamos $\varepsilon(z, t)\varepsilon^*(z, t)$ a $1/2$, con lo que se obtiene

$$\exp \left[-\frac{2(t - \frac{z}{v_g})^2}{(1/\alpha) + 16a^2z^2\alpha} \right] = \frac{1}{2} \quad (1.61)$$

$$\ln \left\{ \exp \left[-\frac{2(t - \frac{z}{v_g})^2}{(1/\alpha) + 16a^2z^2\alpha} \right] \right\} = \ln \left(\frac{1}{2} \right) \quad (1.62)$$

$$t - \frac{z}{v_g} = \sqrt{\frac{\ln 2}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + 16a^2z^2\alpha \right)} \quad (1.63)$$

$$(1.64)$$

el tiempo del pulso esta determinado por 2 veces la cantidad anterior, i.e., $T_{FWHM} = 2(t - \frac{z}{v_g})$, con lo que se obtiene

$$T_{FWHM}(z) = \sqrt{2 \ln 2} \sqrt{\frac{1}{\alpha} + 16a^2z^2\alpha} \quad (1.65)$$

para $z = 0$, se obtiene la duración del pulso inicial medido con el mismo criterio

$$T_{0,FWHM} = \left(\frac{2 \ln 2}{\alpha} \right)^{1/2} \quad (1.66)$$

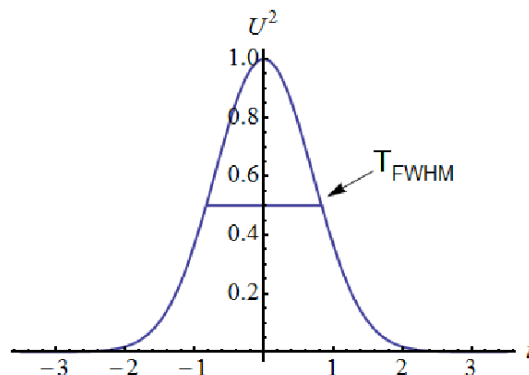


Figura 1.9: Duración temporal medida a la mitad del perfil de intensidad.

Después de que el pulso se ha propagado una distancia L en algún medio sufrirá un ensanchamiento temporal, determinado por:

$$T_{FWHM}(z) = T_{0,FWHM} \sqrt{1 + \left(\frac{8aL \ln 2}{T_{0,FWHM}^2} \right)^2} \quad (1.67)$$

Para distancias grandes donde $aL \gg T_{0,FWHM}^2$, se obtiene

$$T_{FWHM}(L) = \frac{(8 \ln 2)aL}{T_{0,FWHM}} \quad (1.68)$$

tomando la definición del valor de a dado por (1.58) esta expresión puede escribirse como

$$T_{FWHM}(L) = \frac{4 \ln 2}{v_g^2} \frac{dv_g}{d\omega} \frac{L}{T_{0,FWHM}} \quad (1.69)$$

Otro criterio se define, para cuando la duración del pulso se toma a la altura $1/e$ directamente del campo $\varepsilon(z, t)$, en este caso al no tomar el complejo conjugado de $\varepsilon(z, t)$, se tiene la expresión:

$$\exp \left[- \frac{(t - \frac{z}{v_g})^2}{(1/\alpha) + 16a^2 z^2 \alpha} \right] = \frac{1}{e} \quad (1.70)$$

$$\ln \left\{ \exp \left[- \frac{2(t - \frac{z}{v_g})^2}{(1/\alpha) + 16a^2 z^2 \alpha} \right] \right\} = \ln \left(\frac{1}{e} \right) \quad (1.71)$$

$$t - \frac{z}{v_g} = \sqrt{\frac{1}{\alpha} + 16a^2 z^2 \alpha} \quad (1.72)$$

$$(1.73)$$

Por lo que el tiempo medido de esta manera, en campo, esta determinado por $T = t - \frac{z}{v_g}$

$$T = \sqrt{\frac{1}{\alpha} + 16a^2 z^2 \alpha} \quad (1.74)$$

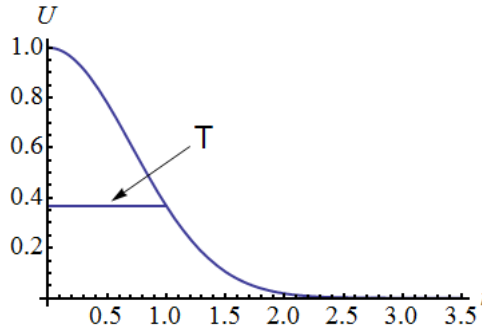


Figura 1.10: Duración temporal de un pulso gaussiano medida a $1/e$ en campo.

Hay un criterio más para medir la duración temporal de pulsos gaussianos y consiste en tomar el ancho temporal en el perfil de intensidad, cuando la intensidad máxima cae a $1/e$ de su valor máximo. Si se tiene un perfil de intensidad normalizado, por lo que el valor máximo alcanzado es igual a 1, el ancho del perfil a $1/e$ ($1/e=0.3678$) describe el valor T_{int} . Este es el criterio con el que se ha determinado la duración del pulso en ésta tesis. Cuando se toma la referencia a $1/e$ la duración del tiempo estaría dada por T_{int} , para determinar este valor igualamos $\varepsilon(z, t)\varepsilon^*(z, t)$ al valor $1/e$, tal que:

$$\exp \left[-\frac{2(t - \frac{z}{v_g})^2}{(1/\alpha) + 16a^2z^2\alpha} \right] = \frac{1}{e} \quad (1.75)$$

$$\ln \left\{ \exp \left[-\frac{2(t - \frac{z}{v_g})^2}{(1/\alpha) + 16a^2z^2\alpha} \right] \right\} = -1 \quad (1.76)$$

$$t - \frac{z}{v_g} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + 16a^2z^2\alpha \right)} \quad (1.77)$$

En el perfil de intensidad el ancho total temporal es $2(t - \frac{z}{v_g})$, con ello se obtiene que la duración del pulso es:

$$T_{int} = 2\sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\alpha} + 16a^2z^2\alpha \right)} = \sqrt{2 \left(\frac{1}{\alpha} + 16a^2z^2\alpha \right)} \quad (1.78)$$

A partir de las ecuaciones (1.74) y (1.78), se tiene que $T_{int} = \sqrt{2}T$.

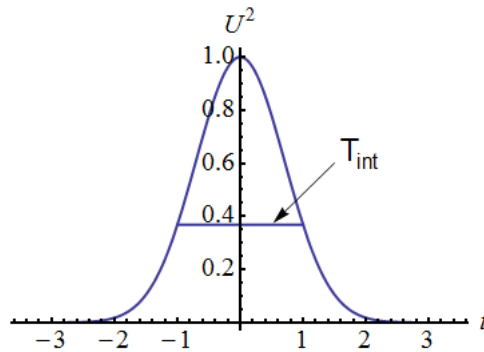


Figura 1.11: Duración temporal de un pulso gaussiano medida a $1/e$ en intensidad.

De las relaciones (1.65) y (1.78), se tiene que $T_{FWHM} = \sqrt{\ln 2}T_{int}$.

Siendo la velocidad de la luz en el vacío $c = 3 \times 10^8 \text{m/s}$, el tiempo que le toma recorrer la distancia de 810nm es $t = 2,7 \times 10^{-15} \text{s}$. El valor de $\lambda_0 = 810 \text{nm}$ es de interés pues es la longitud de onda con la que trabaja el láser pulsado que se tiene en el laboratorio de pulsos ultracortos del CCADET. Si tenemos un pulso de luz láser con una longitud de onda de la portadora $\lambda_0 = 810 \text{nm}$, en $t = 2,7 \times 10^{-15} \text{s}$, el campo eléctrico habrá descrito una oscilación completa, con base en ello graficamos los campos y el perfil de intensidad, la gráfica para dicho pulso define un ciclo.

A continuación se muestra la oscilación del campo para un pulso con una duración $T_{int} = 2,7 \text{fs}$ medido con el criterio $1/e$, también para la duración $2,7/\sqrt{2}$, lo que corresponde a $T = 2,7 \text{fs}$. Después se muestran las oscilaciones del campo considerando el criterio FWHM para las mismas duraciones del pulso, en este caso el tiempo T_{FWHM} se indica como τ_p que corresponde a la notación del libro de Diels [82]. Y finalmente medido a $1/2$ pero en campo, lo que se indica con la letra τ .

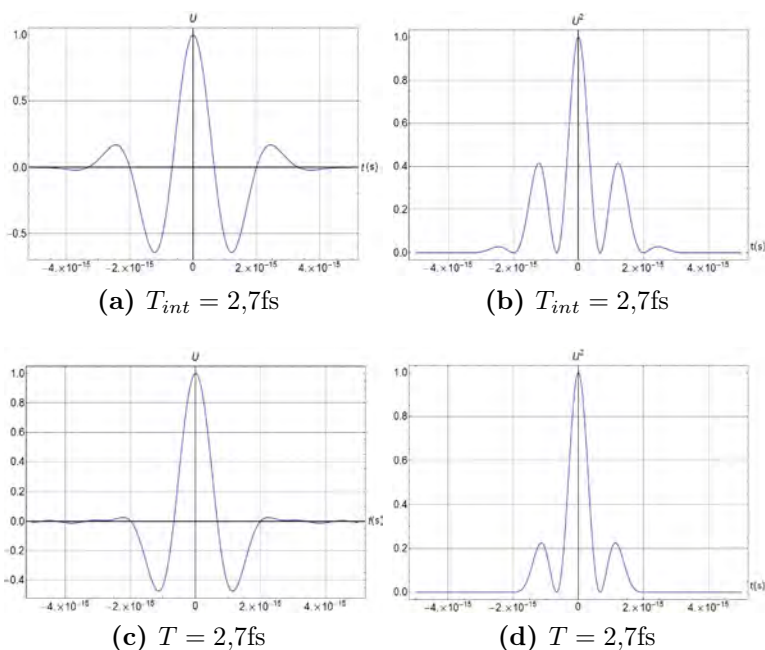
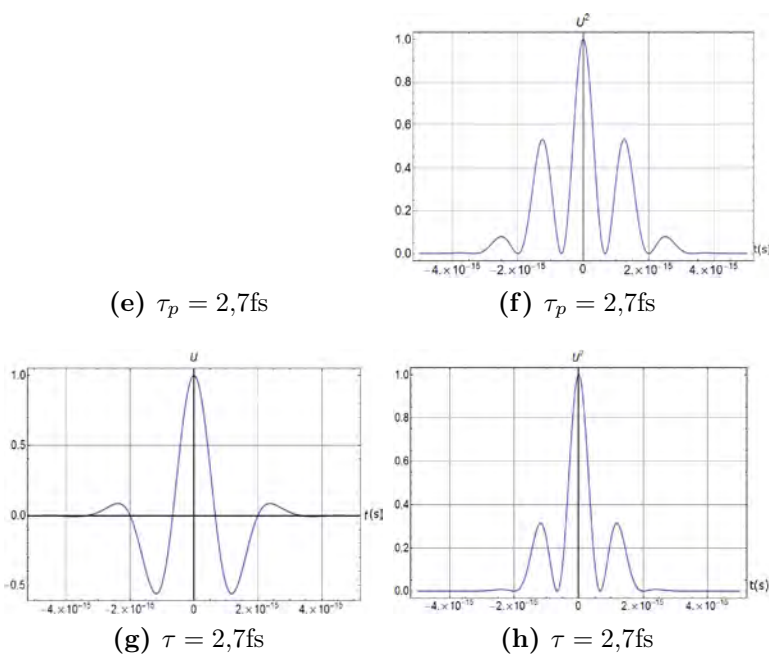
Duración medida a $1/e$ Duración medida a $1/2$ 

Figura 1.12: Se muestran las oscilaciones del campo eléctrico de pulsos creados con una modulación gaussiana, para $\lambda = 810\text{nm}$ y con diferentes duraciones. La figura (b) muestra un ancho de 2.7fs medidos a $1/e$ en el perfil de intensidad U^2 , a este tiempo se ha llamado T_{int} , la figura (a) muestra el perfil del campo eléctrico asociado. La figura (c) muestra el campo U con un ancho de 2.7fs medidos a $1/e$, a esta duración temporal se ha nombrado T , la figura (d) es el perfil de intensidad asociado a dicho campo. La figura (f) muestra el perfil de intensidad con ancho 2.7fs medidos a $1/2$ correspondiente a τ_p o T_{FWHM} , la figura (e) muestra el campo asociado. De manera análoga a la presentación de la figura (c), se presentan la figura (g), la cual muestra perfiles con duración de 2.7fs medidos en campo a la mitad del valor máximo, el perfil de intensidad asociado a este campo, se presenta en la figura (h).

A continuación se muestran las oscilaciones de pulsos de diferentes duraciones con una frecuencia de la portadora de $\lambda_0 = 810\text{nm}$. El tiempo de cada pulso ha sido tomado cuando la intensidad cae a $1/e$ de su valor máximo en el perfil de intensidad, T_{int} .

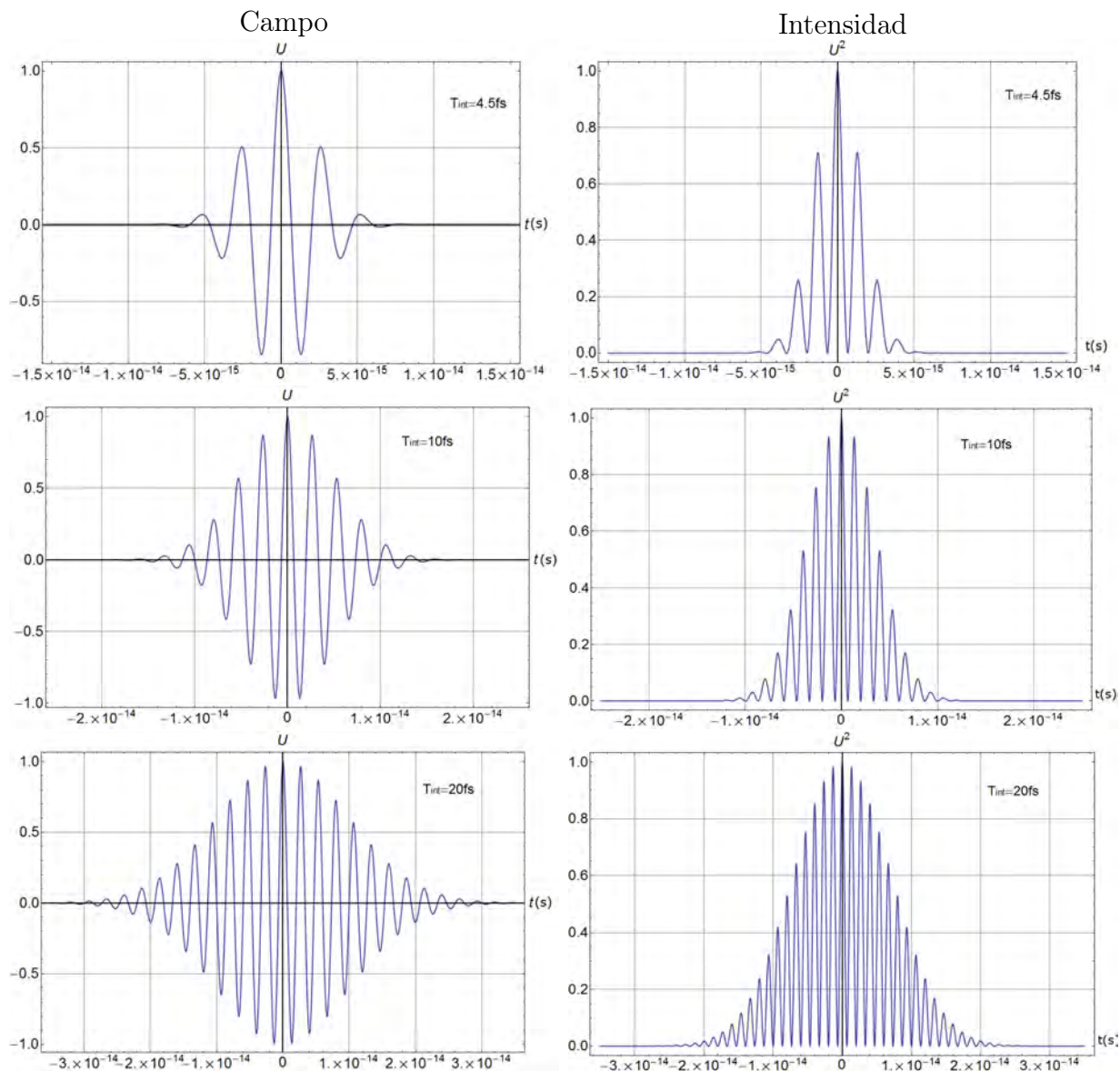


Figura 1.13: Oscilaciones del campo eléctrico de pulsos creados con una modulación gaussiana, con diferentes duraciones medidos a $1/e$ en el perfil de intensidad, para $\lambda_0 = 810\text{nm}$.

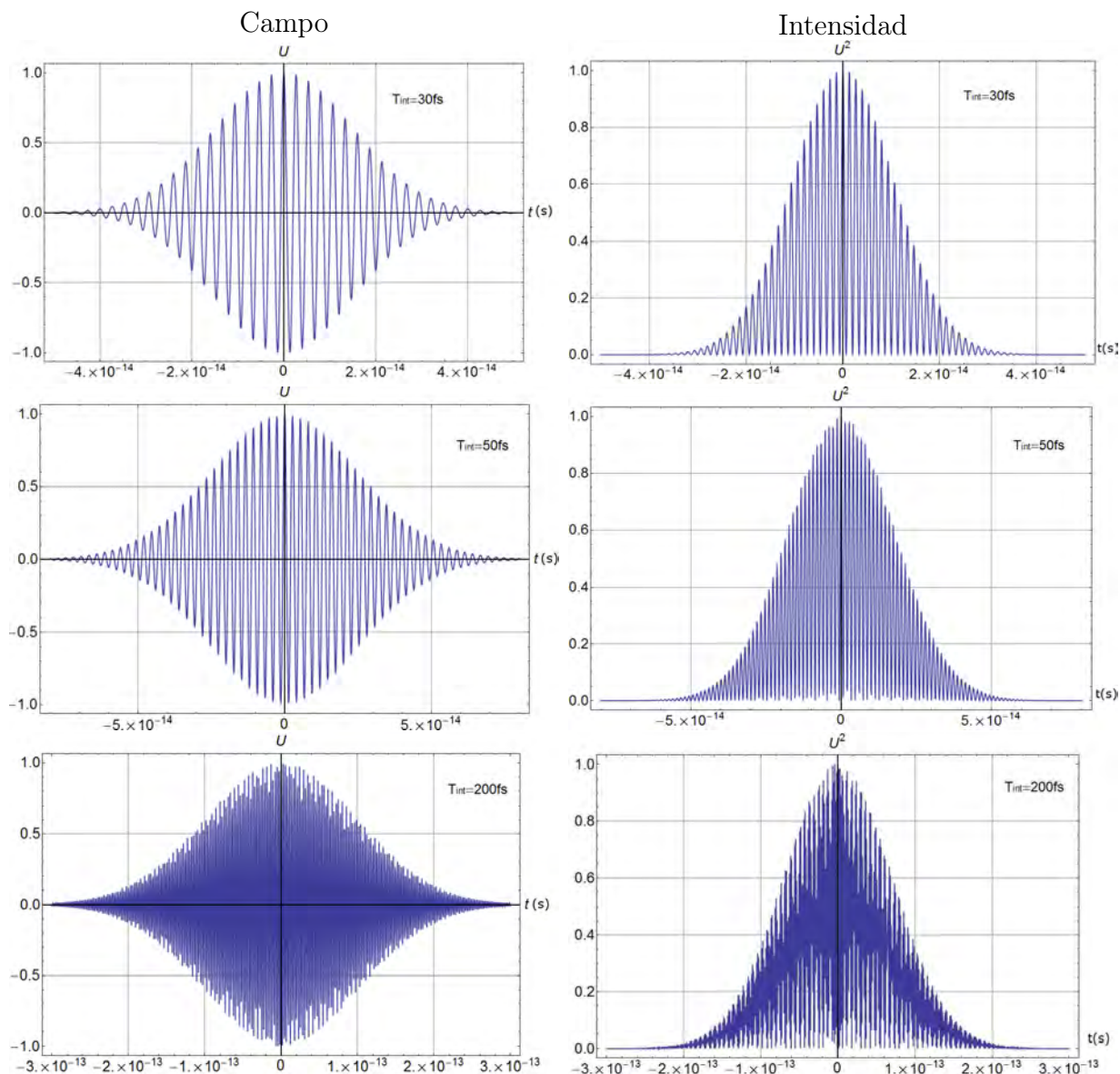


Figura 1.14: Oscilaciones del campo eléctrico de pulsos creados con una modulación gaussiana, con diferentes duraciones medidas a $1/e$ en el perfil de intensidad, para $\lambda_0 = 810\text{nm}$.

1.7. Aberraciones de Seidel

Cuando se busca una imagen de un objeto con la ayuda de una lente, la imagen resultante puede tener diferencias respecto al objeto original, tanto de color como de forma, a estas diferencias se les ha dado el nombre de aberraciones. Existen dos clasificaciones principales entre las aberraciones, las aberraciones cromáticas, las cuales surgen del hecho que el índice de refracción es función de la frecuencia y las aberraciones monocromáticas, que tienen lugar aún cuando la luz del objeto sea altamente monocromática. A su vez las

aberraciones monocromáticas se dividen en dos subgrupos: las aberraciones que deterioran la imagen haciéndola confusa como son la aberración esférica, coma y astigmatismo y las aberraciones que deforman la imagen como lo son la curvatura de campo de Petzval y la distorsión.

En la aberración cromática cada frecuencia tiene un foco distinto y experimenta una desviación distinta. Esto hace que la imagen no se forme en un único punto, sino que dependiendo de la longitud de onda, cada punto del objeto va a diferentes puntos en la imagen, llegando a obtener imágenes de distinto color.

A continuación se presentan las expresiones para las diferentes aberraciones monocromáticas y se pondrá énfasis en la aberración esférica, la cual usaremos en las siguientes secciones.

Cuando se obtiene la imagen de algún objeto, que ha sido enfocado por una lente, las modificaciones observables en la imagen, se deben a que el frente de onda que viaja desde el objeto hasta el detector, va modificándose por las características de la lente. A la diferencia del frente de onda ideal (o la imagen ideal, Σ) y el frente de onda real (la imagen detectada Σ') se le denomina aberración del frente de onda. Esta cantidad es medible y la denotaremos con la letra $W(x, y) = \Sigma' - \Sigma$, en la figura (1.15), se puede observar el sistema de coordenadas.

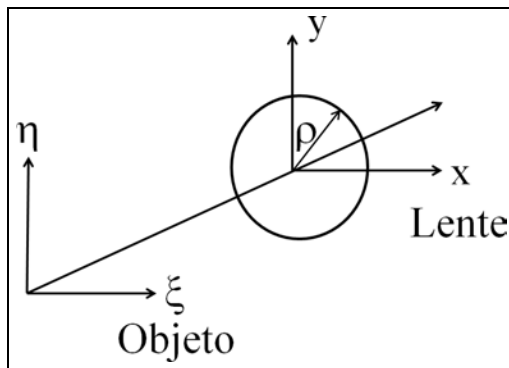


Figura 1.15: Sistema de coordenadas.

Para abordar el problema de describir W , se supone que el sistema es rotacionalmente simétrico, i.e., que se tiene invariancia ante rotaciones, por lo tanto, la descripción de W debe ser función de $x^2 + y^2$, $\xi^2 + \eta^2$ y $x\xi + y\eta$, tal que

$$W(x, y, \xi, \eta) = W(x^2 + y^2, \xi^2 + \eta^2, x\xi + y\eta)$$

por la simetría rotacional, la descripción puede simplificarse, de tal manera que W es una función de:

$$W(x, y, \eta) = W(x^2 + y^2, \eta^2, y\eta)$$

La forma más sencilla de evaluar la diferencia entre los frentes de onda, $W = \Sigma' - \Sigma$, es considerar que los frentes de onda son superficies que se pueden describir por medio de

desarrollos polinomiales, de tal forma que

$$\begin{aligned}
W(x, y, \eta) &= a_1(x^2 + y^2) + a_2(y\eta) + a_3\eta^2 + \\
&+ b_1(x^2 + y^2)^2 + b_2(x^2 + y^2)(y\eta) + \\
&+ b_3(y\eta)^2 + b_4\eta^2(x^2 + y^2) + \\
&+ b_5\eta^2(y\eta) + b_6(\eta^4)^2 + \dots
\end{aligned}$$

donde los puntos suspensivos indican términos de orden superior en x, y y η . En $x = 0, y = 0$, se debe tener $W = 0$, pues se está sobre el eje, por lo tanto, $a_3\eta^2 + b_6\eta^4 = 0$, lo que conduce a $a_3 = b_6 = 0$. El término $a_1(x^2 + y^2)$ corresponde al desenfoque y $a_2(y\eta)$ corresponde al efecto de la inclinación sobre la imagen, estos dos efectos no son considerados como aberración. Los cinco términos que restan (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) se conocen como las aberraciones de Seidel [91], pues fue él quien describió en base a polinomios, la diferencia de los frentes de onda, descrita por la siguiente expresión

$$\begin{aligned}
W(x_2, y_2, \eta) &= \frac{S_I}{8} \left(\frac{x^2 + y^2}{\rho^2} \right)^2 \\
&+ \frac{S_{II}}{2} \left(\frac{x^2 + y^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{y}{\rho} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right) \\
&+ \frac{S_{III}}{2} \left(\frac{y}{\rho} \right)^2 \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right)^2 \\
&+ \frac{(S_{III} + S_{IV})}{4} \left(\frac{x^2 + y^2}{\rho^2} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right)^2 \\
&+ \frac{S_V}{2} \left(\frac{y}{\rho} \right) \left(\frac{\eta}{\eta_{max}} \right)^3
\end{aligned}$$

donde ρ corresponde al radio de la lente. Los coeficientes S son los llamados términos de Seidel, cada uno determina un tipo de aberración en la imagen. Para cada término a continuación se indica el nombre del tipo de aberración asociada.

$$S_I = -A^2 h \Delta \left(\frac{u}{n} \right) \quad \text{Aberración esférica} \quad (1.79)$$

$$S_{II} = -A \bar{A} h \Delta \left(\frac{u}{n} \right) \quad \text{Aberración de coma} \quad (1.80)$$

$$S_{III} = -\bar{A}^2 h \Delta \left(\frac{u}{n} \right) \quad \text{Astigmatismo} \quad (1.81)$$

$$S_{IV} = -H^2 c \Delta \left(\frac{1}{n} \right) \quad \text{Curvatura de campo} \quad (1.82)$$

$$S_V = \frac{\bar{A}}{A} (S_{III} + S_{IV}) \quad \text{Distorsión} \quad (1.83)$$

Donde $A = ni = n'i'$ es el invariante de refracción, ρ es la altura del rayo paraxial marginal en la pupila de salida, (el radio de la lente en nuestra siguiente descripción) $\Delta(u/n) =$

$u'/n' - u/n$, donde n, n' son los índices de refracción antes y después de refractarse el rayo y u, u' son los ángulos del rayo paraxial marginal con el eje óptico antes y después de refractarse. $\bar{A} = n\bar{i} = n'\bar{i}'$, donde \bar{i}, \bar{i}' son los ángulos de incidencia y refracción del rayo paraxial marginal. $c = 1/R$ denota la curvatura de la superficie. $H = nu\eta$ es el invariante integral de Lagrange y η es la altura del objeto.

En la figura (1.16), se describen las coordenadas de un rayo refractado por una superficie esférica de radio R que separa dos medios, el primero de índice de refracción n y el segundo de índice de refracción n' .

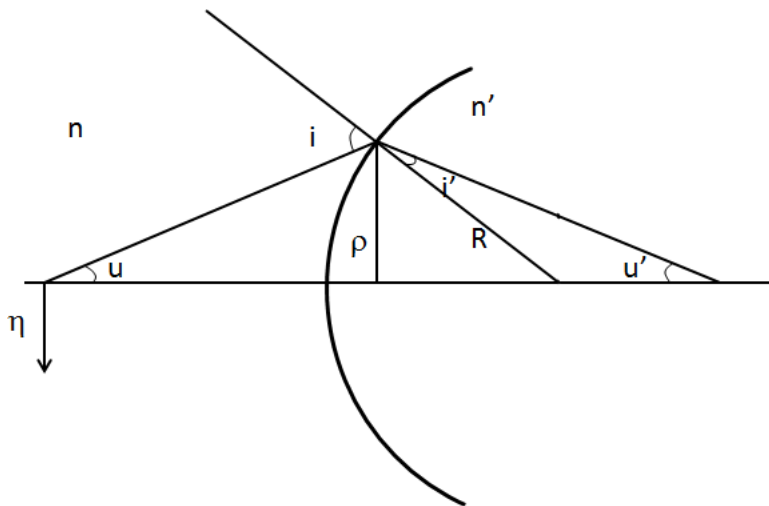


Figura 1.16: Refracción de un rayo por una superficie esférica de radio R

1.7.1. Aberración Esférica

Los rayos paralelos al eje óptico reflejados (caso de los espejos) o refractados (caso de las lentes) se concentran en el foco, sin embargo, ese punto focal es diferente para los rayos que son paraxiales que para los que van alejados del eje de la lente. Los rayos marginales (no paraxiales) se desvían en su refracción de tal forma que son enfocados antes del foco de los rayos paraxiales. La distancia comprendida entre la intersección con el eje, de un rayo cualquiera y el foco paraxial, f_0 es conocida como la aberración esférica longitudinal de dicho rayo [56–58]. De manera similar, en la dirección perpendicular al eje óptico, se define la aberración esférica transversal. Adicionalmente cuando los rayos paralelos se propagan en dirección paralela al eje óptico de la lente, entonces solo se introduce aberración esférica. En la presente tesis suponemos que incide un haz colimado, i.e., rayos paralelos, propagándose paralelos al eje óptico de la lente.

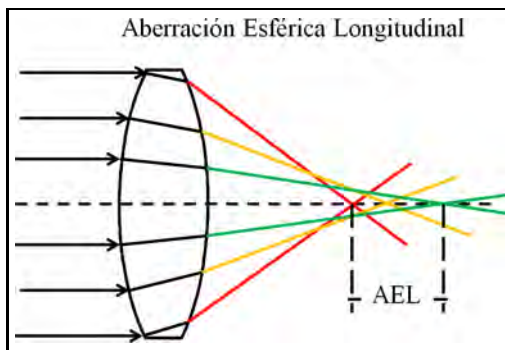


Figura 1.17: Aberración esférica longitudinal.

Para encontrar la aberración esférica longitudinal (AEL), de una lente, podemos suponer por simplicidad que la lente es una lente delgada. La ecuación de Gauss para una lente delgada establece que la distancia focal f , depende del índice de refracción y de los radios de curvatura de las superficies esféricas que forman la lente de la forma [65, 78]:

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{n - n_m}{n_m} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.84)$$

donde n_m es el índice de refracción que rodea la lente, si la lente está en aire, entonces $n_m = 1$, por lo que la distancia focal de una lente delgada, esta descrita por la ecuación

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.85)$$

donde n es el índice de refracción del vidrio de la lente, R_1 y R_2 son los radios de curvatura de la lente. Para el caso de un doblete, la distancia focal efectiva de este sistema esta definida por la ecuación:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_{01}} + \frac{1}{f_{02}} \quad (1.86)$$

donde la distancia focal de cada una de las lentes que lo conforman esta determinado por:

$$\frac{1}{f_{01}} = (n_1 - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.87)$$

$$\frac{1}{f_{02}} = (n_2 - 1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \quad (1.88)$$

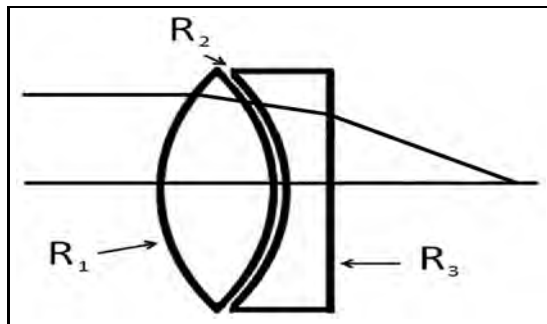


Figura 1.18: Radios de curvatura de un doblete.

Donde n_1 , R_1 y R_2 corresponden al índice de refracción y los radios de curvatura de la lente 1. Para la lente 2, el índice de refracción es n_2 , y los radios de curvatura son R_2 y R_3 . En un doblete, las lentes quedan cementadas, es decir el radio de curvatura es el mismo sobre la superficie de contacto. Los índices de refracción, n_1 y n_2 son los índices de refracción para la frecuencia de la onda portadora. Cada lente tiene un grosor central dado por d_1 y d_2 . La aberración de la lente o doblete, esta determinado por el número de onda k_a , multiplicado por la diferencia del frente de onda $W(x, y; \eta)$

$$\Theta(x, y; \eta) = k_a W(x, y; \eta) \quad (1.89)$$

Las coordenadas a las que se hace mención, estan descritas en las figuras (1.15). k_a es el número de onda asociado a cada frecuencia del pulso en el aire.

Para un doblete, la diferencia de fase W , puede ser descrito en términos de la suma de las funciones de Seidel S_1 y S_2 [91]. La función de Seidel que describe la aberración esférica para una lente delgada, cuando el diafragma esta localizado en la lente, esta dada por la expresión:

$$S(\rho) = \frac{\rho^4}{4f^3} \left[\left(\frac{n}{n+1} \right)^2 + \left(\frac{n+2}{n(n-1)^2} \right) \left(B + \left(\frac{2(n^2-1)C}{n+2} \right)^2 - \frac{nC^2}{n+2} \right) \right] \quad (1.90)$$

donde B es el factor de forma definido por

$$B = \frac{\varsigma_1 + \varsigma_2}{\varsigma_1 - \varsigma_2} \quad (1.91)$$

donde $\varsigma_1 = 1/R_1$, $\varsigma_2 = 1/R_2$ y C es el factor conjugado descrito por

$$C = \frac{u + u'}{u - u'} \quad (1.92)$$

donde u y u' son los ángulos del rayo paraxial marginal en el espacio objeto y en el espacio imagen, respectivamente medidos respecto al eje óptico de la lente, figura (1.16).

La aberración esférica puede evitarse con un diafragma (disco opaco centrado en el eje con un orificio central) que elimine los rayos no paraxiales, sin embargo, también se reduce la resolución de la lente.

1.8. Lente delgada como una transformación de fase

Una lente esta compuesta por un material que es ópticamente denso, normalmente un vidrio de índice de refracción cercano a $n \approx 1,5$ por lo que la velocidad de la propagación óptica es menor que la propagación en el aire. La descripción de una lente delgada puede hacerse si el rayo que incide a cierta altura en una de sus superficies sale con una altura similar, por lo que es despreciable la traslación de un rayo dentro de la lente. Una lente delgada siempre retrasa la fase de un frente de onda incidente una cantidad proporcional a su espesor en cada punto.

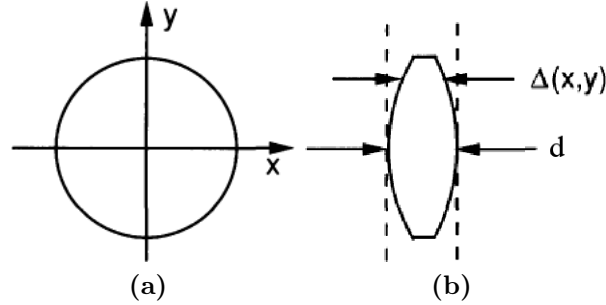


Figura 1.19: Esquema de la lente, en (a) se muestra la vista frontal y las coordenada de la lente, en (b) la lente vista de perfil, donde se aprecian el ancho máximo d y el ancho Δ para las coordenadas (x, y) .

Siendo d el máximo espesor de la lente a lo largo del eje óptico y $\Delta(x, y)$ el espesor que tiene en las coordenadas (x, y) . El defase total sufrido por la onda al atravesar la lente por el punto de coordenadas (x, y) , se puede escribir como:

$$\Phi(x, y) = kn\Delta(x, y) + k[d - \Delta(x, y)] \quad (1.93)$$

donde n es el índice de refracción del material, $kn\Delta(x, y)$ el defase introducido por la lente y $k[d - \Delta(x, y)]$ el introducido por el espacio restante que queda entre los dos planos. Por lo que los números de onda empleados son diferentes, mientras que en la lente el número de onda es k_ℓ , en el aire toma el valor k_a . De tal forma que la fase queda

$$\Phi(x, y) = k_\ell n_\ell \Delta(x, y) + k_a n_a [d - \Delta(x, y)] \quad (1.94)$$

Podemos aproximar $n_a \approx 1$. De manera equivalente, el efecto producido por una lente se puede representar por medio de una transformación de fase:

$$t_\ell = e^{ik_a d} e^{i(k_\ell n_\ell - k_a)\Delta(x, y)} \quad (1.95)$$

El campo $U'_\ell(x, y)$ sobre un plano inmediatamente detrás de la lente se relaciona con el campo incidente sobre un plano inmediatamente delante de la lente por la expresión:

$$U'_\ell(x, y) = t_\ell U_\ell(x, y) \quad (1.96)$$

Para tener una descripción completa vamos a determinar la función $\Delta(x, y)$ que es la función espesor y que determina los efectos de la lente.

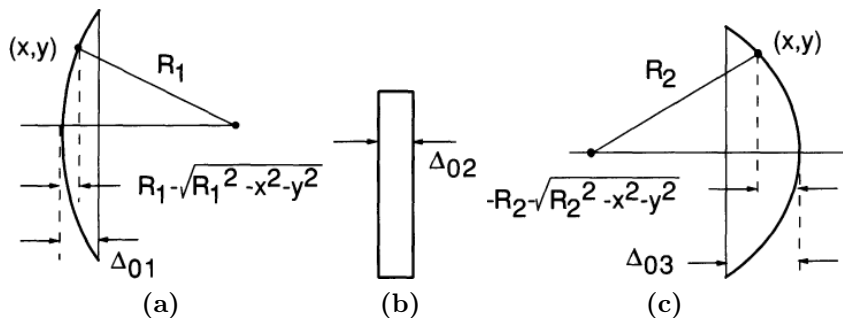


Figura 1.20: Esquema de los anchos de la lente, dividida en tres partes.

Tomando que el radio de curvatura de cada superficie convexa sea considerado positivo y el de cada superficie cóncava negativo. En la figura (1.20a) el radio de curvatura de la superficie de la izquierda de la lente es un número positivo R_1 , mientras que el radio de curvatura de la superficie de la derecha es negativo R_2 , figura (1.20c).

Para calcular el espesor $\Delta(x, y)$ se divide a la lente en tres partes, como se muestra en la figura (1.20) y escribimos la función espesor como la suma de las tres funciones espesor individuales:

$$\Delta(x, y) = \Delta_1(x, y) + \Delta_2(x, y) + \Delta_3(x, y) \quad (1.97)$$

Por las indicaciones en la figura sobre la geometría de las superficies, la primer función espesor esta determinada por:

$$\begin{aligned} \Delta_1(x, y) &= \Delta_{01}(x, y) - (R_1 - \sqrt{R_1^2 - x^2 - y^2}) \\ &= \Delta_{01}(x, y) - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.98)$$

La segunda componente de la función espesor corresponde a una lámina de vidrio de espesor Δ_{02} constante. La tercer componente viene dada por:

$$\begin{aligned} \Delta_3(x, y) &= \Delta_{03}(x, y) - (R_2 - \sqrt{R_2^2 - x^2 - y^2}) \\ &= \Delta_{03}(x, y) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right) \end{aligned} \quad (1.99)$$

Sumando las tres expresiones se obtiene la función del espesor total, dada por:

$$\Delta(x, y) = d - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right) \quad (1.100)$$

donde $d = \Delta_{01} + \Delta_{02} + \Delta_{03}$. Si ahora se considera a las partes del frente de onda situadas cerca de la lente, es decir a los rayos paraxiales, por lo que sólo se toman valores de x y y suficientemente pequeños tal que se puede aproximar la raíz por:

$$\sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_1^2}, \quad \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \approx 1 - \frac{x^2 + y^2}{2R_2^2} \quad (1.101)$$

La transformación de fase es sólo para la región paraxial, esta misma aproximación se toma en la óptica geométrica. De esta manera la función espesor esta descrita por:

$$\Delta(x, y) = d - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.102)$$

Sustituyendo (1.102) en la fase, se tiene:

$$\begin{aligned} \Phi &= k_a d + (k_\ell n_\ell - k_a) \left[d - \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right] \\ &= k_\ell n_\ell d + (k_a - k_\ell n_\ell) \left(\frac{x^2 + y^2}{2} \right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \end{aligned} \quad (1.103)$$

obtenemos la transformación producida por la lente:

$$t_\ell = e^{ik_\ell n_\ell d} \exp \left\{ -i(k_\ell n_\ell - k_a) \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right\} \quad (1.104)$$

Esta ecuación representa los efectos de una lente delgada sobre una perturbación incidente. Por ejemplo, si se tiene una onda plana que incide de manera normal sobre la lente, si la distribución del campo U_ℓ en el plano tangente a la cara anterior de la lente tiene el valor constante 1, las ecuaciones (1.95) y (1.104) indican que el campo a la salida de la lente es:

$$U'_\ell(x, y) = e^{ik_\ell n_\ell d} \exp \left\{ -i(k_\ell n_\ell - k_a) \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right\} \quad (1.105)$$

Si la distancia focal es positiva, la onda esférica converge hacia el punto focal, situado en el eje de la lente o eje óptico. Esta aproximación depende de la aproximación paraxial que se ha considerado, cuando no se toma esta aproximación, se deben considerar las aberraciones monocromáticas de la lente, en este trabajo consideraremos la aberración esférica de la lente, dado que suponemos que el haz de luz llega colimado a la lente, paralelo al eje óptico de ésta.

Una de las propiedades más importantes de una lente convergente es que mediante una transformada de Fourier bidimensional, se puede describir su efecto sobre una onda plana que incide sobre ella y llega al foco de la misma. Si suponemos que la iluminación es monocromática, bajo esta suposición el sistema es coherente y lo que interesa es la distribución de la amplitud en un plano frente a la lente, como por ejemplo, el plano focal imagen de la lente.

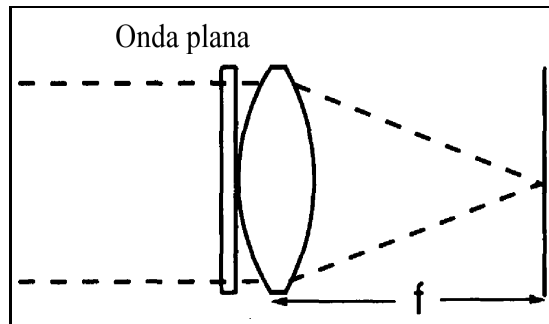


Figura 1.21: Configuración para la transformada de Fourier de una lente convergente.

Considerando una onda plana monocromática de amplitud A con transmitancia $t_A(x, y)$ que incide normalmente sobre una lente convergente de distancia focal f iluminándola de manera uniforme, como se muestra en la figura (1.21), entonces la perturbación sobre la lente es:

$$U'_\ell(x, y) = At_A(x, y) \quad (1.106)$$

Las dimensiones finitas de la abertura de la lente pueden ser tenidas en cuenta si se asocia la función pupila $P(x, y)$ definida por:

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{dentro de la lente} \\ 0 & \text{fuera de la lente} \end{cases} \quad (1.107)$$

De la expresión (1.104), la distribución de amplitud detrás de la lente, i.e., cuando ha pasado por la lente es:

$$U'_\ell(x, y) = U_\ell(x, y)P(x, y)e^{ik_\ell n_\ell d} \exp \left\{ -i(k_\ell n_\ell - k_a) \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right\} \quad (1.108)$$

Para determinar la distribución $U_z(x_2, y_2)$ en el plano z localizado cerca de la posición focal, se aplica la fórmula de difracción de Fresnel [94], el campo U_z esta descrito por:

$$U_z(x_2, y_2) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U'_\ell(x, y) \exp \left\{ \frac{ik_a}{2z} ((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2) \right\} dx dy \quad (1.109)$$

Sustituyendo (1.108) en (1.109) se obtiene:

$$\begin{aligned} U_z(x_2, y_2) &\approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_\ell(x, y)P(x, y)e^{ik_\ell n_\ell d} \\ &\times \exp \left\{ -i(k_\ell n_\ell - k_a) \frac{x^2 + y^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right\} \\ &\times \exp \left\{ \frac{ik_a}{2z} ((x - x_2)^2 + (y - y_2)^2) \right\} dx dy \end{aligned} \quad (1.110)$$

Por lo que, la distribución de campo U_z es proporcional a la transformada de Fourier bidimensional de la parte del campo incidente limitada por la abertura de la lente.

1.9. Dispersión de la velocidad de grupo (GVD)

El campo eléctrico de un pulso de femtosegundos antes de la lente en el plano A , es la superposición de ondas planas monocromáticas, si t_0 es el tiempo en el plano A , esto se puede escribir como

$$E_A(t_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty F(\omega) \exp(i\omega t_0) d\omega \quad (1.111)$$

t_0 es el tiempo local en el plano A .

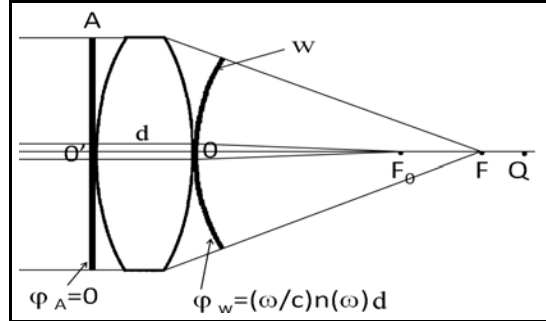


Figura 1.22: Una lente convierte ondas monocromáticas planas en un patrón de difracción de Airy. Debido a la aberración cromática, las diferentes componentes de Fourier de un pulso ultracorto, son enfocadas en diferentes posiciones sobre el eje óptico. El frente del pulso frente a la lente puede ser calculado como la superposición de los patrones de Airy de las componentes de Fourier individuales.

La lente convierte a las ondas monocromáticas planas en ondas esféricas con un radio de curvatura igual a $f(\omega)$ que convergen en el punto focal F . En la figura podemos ver que la curva w , es el frente de fase justo detrás de la lente. Para conocer el campo eléctrico en el punto Q , se debe calcular mediante la integral de difracción, indicada en la ecuación (1.109).

Inicialmente en el plano A se ha considerado la fase igual a cero, después que el pulso ha pasado por la lente, sobre la superficie w , la fase esta dada por:

$$\varphi(\omega) = \frac{\omega n(\omega) d}{c} \quad (1.112)$$

donde d es el grosor de la lente sobre el eje óptico, [95]. Para estudiar la evolución del pulso en el tiempo, se expande la fase $\varphi(\omega)$ respecto a la frecuencia, con lo que se obtiene:

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \frac{d\varphi}{d\omega} + \frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + \frac{1}{6}(\omega - \omega_0)^3 \frac{d^3\varphi}{d\omega^3} + \dots \quad (1.113)$$

Cada término, tiene una repercusión distinta sobre el pulso que llega a una posición cercana a la focal:

- El término $\varphi(\omega_0)$ es el cambio en la fase de la onda portadora, pero no tiene un efecto sobre la forma del pulso, por lo que un pulso que se ha propagado por una lente, después de la lente tendrá la misma forma.
- El término $\frac{d\varphi}{d\omega}$ indica el tiempo que tarda el pulso en viajar por la lente y llegar a la posición z , es una constante conocida como el retraso de grupo $\tau_g = z/v_g$. La forma del pulso no es afectada por éste término.
- El término $\frac{d^2\varphi}{d\omega^2}$ da un chirp lineal al pulso, el cambio de la variación temporal en la frecuencia óptica instantánea a través del pulso al propagarse por un medio dispersivo. Este término corresponde a la dispersión de velocidad de grupo de segundo orden, **GVD de segundo orden**.
- El término $\frac{d^3\varphi}{d\omega^3}$ suma un chirp cuadrático al pulso, o sea un chirp no lineal. Los términos cúbicos y mayores llegan a tener gran importancia cuando la duración del pulso es menor a 20fs, esto se muestra en el capítulo 5. Este término corresponde a la dispersión de velocidad de grupo de tercer orden, **GVD de tercer orden**.

A continuación se explica que es un pulso con chirp. Si la fase del pulso $\varphi(t)$ varía con el tiempo, de tal forma que la frecuencia instantánea varía con el tiempo, se dice que el pulso, es un pulso con chirp [82, 86]. La primera derivada de la fase se relaciona con la frecuencia instantánea del pulso de la forma:

$$\omega(t) = \omega_0 + \frac{d}{dt}\varphi(t) \quad (1.114)$$

donde la frecuencia central del pulso es ω_0 . En la figura (1.23), se observa un pulso donde su frecuencia varía con el tiempo, es decir, un pulso con chirp. Donde las oscilaciones de la onda portadora no se encuentran igualmente espaciadas.

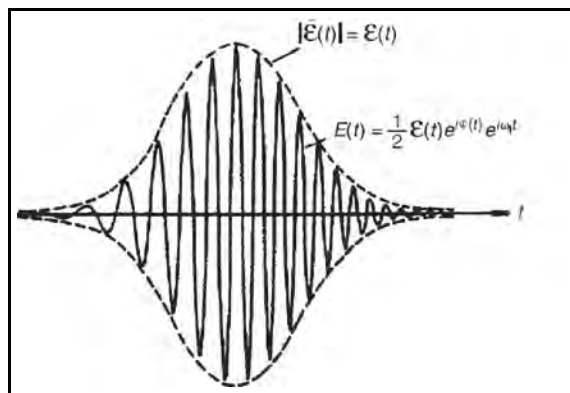


Figura 1.23: Campo eléctrico de un pulso con chirp.

En este trabajo de tesis los pulsos que inciden sobre la lente los hemos modelado como pulsos sin chirp, también llamados pulsos limitados por su ancho de banda. Al pasar estos

pulsos por la lente, se introduce chirp en los pulsos por la dispersión del material. En todo el trabajo de tesis, el término que introduce chirp lineal en el pulso se hace igual a cero. La justificación para hacer esto, es que el chirp lineal es un efecto que puede ser compensado introduciendo la misma cantidad de chirp lineal, pero de signo contrario [54, 55], al pulso que incide sobre la lente. De manera experimental, se utiliza un compresor el cual puede estar basado en un par de prismas de baja dispersión para introducir chirp lineal al pulso que incide sobre la lente. Adicionalmente, para pulsos con duraciones temporales por debajo de 30fs, el chirp lineal que introduce la lente al pulso domina sobre los otros efectos que generan un ensanchamiento temporal en el pulso. Al compensar el chirp lineal es más fácil observar el ensanchamiento temporal del pulso por chirp cuadrático o el generado por la aberración cromática de la lente.

A partir de la derivada de segundo orden de la fase, que se indica en la ecuación (1.115), la dispersión del material genera la dispersión de la velocidad de grupo o GVD [49, 60].

$$\varphi(\omega) = \varphi(\omega_0) + (\omega - \omega_0) \frac{d\varphi}{d\omega} + \underbrace{\frac{1}{2}(\omega - \omega_0)^2 \frac{d^2\varphi}{d\omega^2} + \frac{1}{6}(\omega - \omega_0)^3 \frac{d^3\varphi}{d\omega^3} + \dots}_{\text{Términos de GVD}} \quad (1.115)$$

La dispersión de la velocidad de grupo de segundo orden esta definida por la segunda derivada del número de onda respecto a la frecuencia:

$$\text{GVD} = \frac{d^2k}{d\omega^2} = \frac{d}{d\omega} \left(\frac{1}{v_g} \right) \quad (1.116)$$

Tomando la definición de a , (1.58) $\text{GVD} = 2a$.

El pulso debido a la dispersión por GVD, sufre un ensanchamiento en tiempo dado por la ecuación (1.69). Este efecto es de suma importancia en el ensanchamiento temporal del pulso.

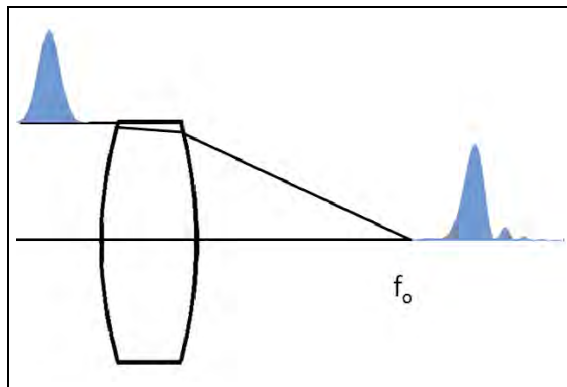


Figura 1.24: Efecto de GVD sobre un pulso gaussiano que se propaga por una lente. Se observa que el pulso se parte, perdiendo su forma gaussiana.

Así que los términos de GVD están dados por las derivadas a partir de la derivada de segundo orden descritas en (1.115).

1.10. Diferencia en el tiempo de propagación (PTD)

Algunas aplicaciones importantes en las que se emplean pulsos de láser, requieren una mayor intensidad, ésta se puede alcanzar enfocando el pulso con ayuda de una lente. Sin embargo, el uso de lentes, para enfocar luz pulsada trae un efecto que ensancha al pulso, conocido como PTD o diferencia en el tiempo de propagación. En esta sección trataremos este tema.

Supongamos que sobre una lente ideal, incide luz colimada, propagándose paralela al eje óptico de una lente. Por el principio de Fermat, en una lente ideal, el tiempo que le lleva a las ondas viajar del frente de fase al punto focal de la lente es el mismo.

Suponiendo que sobre la lente ideal incide un frente de fase plano, después de pasar por la lente ideal, el frente de fase es esférico, (el frente de fase es la superficie de fase constante, en cambio el frente de pulso es la superficie que une los puntos de máxima intensidad de los pulsos). Si sobre la misma lente incide un frente de pulso plano que coincide con el frente de fase, al pasar por la lente ideal el frente del pulso no es esférico, sino que está distorsionado como se muestra en (1.25).

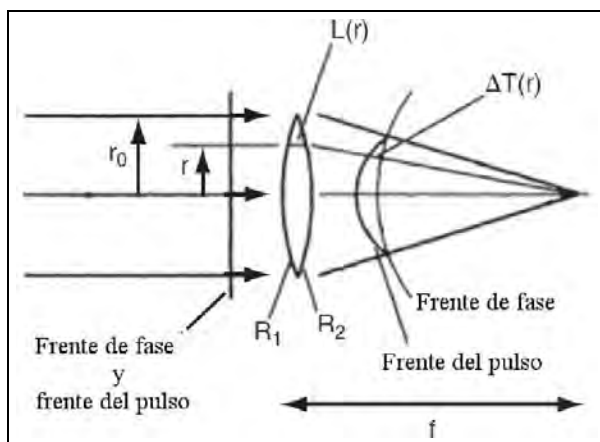


Figura 1.25: Distorsión de un frente de pulso al pasar por una lente ideal (en fase).

En una lente ideal, de acuerdo con el principio de Fermat, la trayectoria óptica a lo largo del rayo entre el frente de fase de entrada y el punto focal, es independiente de la coordenada r . La lente transforma el frente de onda plano, en un frente de onda esférico que converge en el foco paraxial. Tratando al aire como vacío, entonces sólo cuando el pulso está viajando a través de la lente, experimenta la velocidad de grupo v_g diferente

a la velocidad de fase $v = c/n$. El resultado es un frente de pulso que tiene un retraso respecto al frente de fase esférico, dependiendo de la cantidad de vidrio por la que haya viajado. La velocidad de grupo es:

$$v_g = \left(\frac{dk}{d\omega}\right)^{-1} = \frac{c}{n - \lambda_\ell \frac{dn}{d\lambda}} \quad (1.117)$$

donde λ_ℓ es la longitud de la onda en el vacío. La diferencia en el tiempo de propagación (PTD por sus siglas en inglés Propagation Time Difference), entre el frente de fase y el frente del pulso después que ha pasado por la lente, depende de la coordenada r y esta determinado por:

$$\Delta T = \left(\frac{1}{v} - \frac{1}{v_g}\right)L(r) \quad (1.118)$$

donde $L(r)$ es el grosor de la lente a la altura r . Una forma en la que se modela el pulso que pasa por una lente, es que por cada rayo, se tiene un pulso de la misma duración T_{int} , el pulso viaja sobre la trayectoria indicada por el rayo [102]. El retraso $\Delta T(r)$ es la diferencia entre el tiempo en el que llega el pulso que viaja por la lente a la altura r del eje y el pulso que viaja por el borde de la lente. El pulso que viaja sobre el eje ($r = 0$) llegará retrasado al plano focal de una lente positiva comparado con el pulso que pasa a la distancia $r > 0$. Para una lente esférica delgada, el grosor L esta dado por:

$$L(r) = \frac{r_0^2 - r^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad (1.119)$$

donde R_1 y R_2 son los radios de curvatura de la lente y r_0 es el semidiámetro de la lente. Sustituyendo las expresiones para la velocidad de grupo (1.117) y para el grosor de la lente (1.119) en la ecuación (1.118) obtenemos la diferencia en el tiempo de llegada entre dos pulsos que pasan a través de la lente, a diferentes alturas, indicadas por el borde y a la altura r :

$$\begin{aligned} \Delta T'(r) &= \Delta T(r) - \Delta T(r_0) \\ &= \frac{r_0^2 - r^2}{2c} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \left(\lambda \frac{dn}{d\lambda}\right) \\ &= \frac{r_0^2 - r^2}{2c} \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{f}\right) \end{aligned} \quad (1.120)$$

donde la distancia focal f es:

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \quad (1.121)$$

La ecuación (1.120) muestra la conexión entre la dependencia radial del atraso del pulso y la cromaticidad de la lente:

$$\Delta T'(r) \approx \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{f}\right) \quad (1.122)$$

Para un haz que incide sobre la lente a una altura r_b la duración temporal del pulso en el foco puede ser estimado con la diferencia en el tiempo de llegada $\Delta T'$ de un pulso sobre un rayo axial y el pulso que pasa por la lente a r_b , [73].

$$\Delta T'(r_b) = \frac{r_b^2}{2c} \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{f} \right) \tag{1.123}$$

Esta ecuación puede reescribirse en términos de la derivada del índice de refracción respecto a la longitud de onda,

$$\begin{aligned} \Delta T'(r_b) &= \frac{r_b^2}{2c} \lambda \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{f} \right) \\ &= \frac{r_b^2}{2c} \lambda \frac{d}{d\lambda} \left((n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right) \\ &= \frac{r_b^2}{2c} \frac{\lambda}{f(n-1)} \frac{dn}{d\lambda} \end{aligned} \tag{1.124}$$

En lo sucesivo llamaremos PTD a la diferencia del tiempo de llegada de un pulso que se propaga por el eje óptico y el que pasa por la altura r_b , indicado por la cantidad $\Delta T'(r_b)$, i.e., PTD= $\Delta T'(r_b)$, [95].

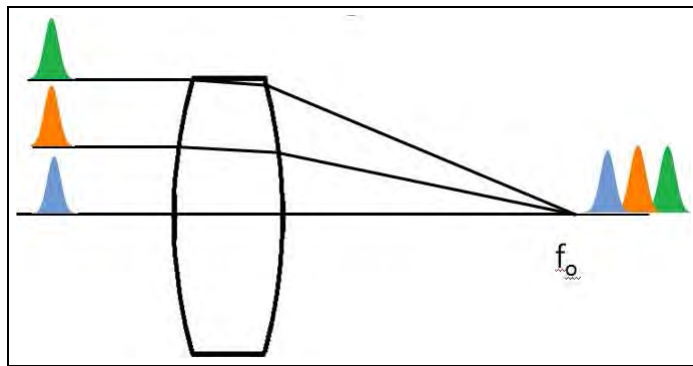


Figura 1.26: Los pulsos propagándose a diferentes alturas de una lente, llegan con una diferencia de tiempo dada por la diferencia en el tiempo de propagación.

En la figura los colores de los pulsos son solo esquemáticos para mostrar el hecho de que pulsos propagándose a diferentes alturas llegan en diferentes tiempos. Todos los pulsos tienen la misma frecuencia de la onda portadora.

Así que además de la dispersión del pulso por el efecto de GVD, hay un ensanchamiento del pulso por la aberración cromática de la lente.

En términos de la frecuencia angular podemos expresar a la diferencia del tiempo de propagación del pulso marginal y el que viaja por el centro de la lente de radio a con la relación

$$\Delta T' = \frac{a^2 k_0}{2f_0(n_0 - 1)} \frac{dn}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \quad (1.125)$$

donde a es el semidiámetro de la lente circular, f_0 la distancia focal para la frecuencia ω_0 , $k_0 = \omega_0/c$ es el vector de onda de la frecuencia ω_0 de la portadora y $n_0 = n(\omega_0)$ es el índice de refracción del material.

Como hemos mencionado, el efecto de PTD proviene de la aberración cromática como lo expresa la ecuación (1.123). Se origina debido a que la luz de un pulso láser no es monocromática, pues para la longitud de onda de la portadora se tiene un ancho de banda asociado. Las distintas frecuencias del pulso tienen distintas velocidades dentro del material de las lentes y por lo tanto distinto índice de refracción. Por lo que, el efecto de PTD, puede ser anulado si usamos lentes acromáticas ideales i.e., aquellas que cumplan

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{1}{f} \right) = 0 \quad (1.126)$$

En la práctica las lentes acromáticas tienen un remanente de color llamado espectro secundario que genera PTD, en cuyo caso es necesario usar una lente apocromática, las cuales, no tienen dicho remanente de color.

1.11. Transformación espacial y temporal de un pulso que ha pasado por una lente.

Para tener una descripción completa de la evolución espacial y temporal de un pulso cerca del foco paraxial, en esta sección vamos a estudiar como el campo de un pulso de luz que se enfoca por una lente, es afectado por los efectos de la aberración esférica de la lente (A), por la dispersión de la velocidad de grupo (GVD) y la diferencia en el tiempo de propagación (PTD).

La figura (1.27) muestra la geometría de una lente delgada circular de semidiámetro a y distancia focal f_0 , las coordenadas de la lente están descritas por (x_1, y_1) , las coordenadas en el plano imagen por las coordenadas (x_2, y_2) .

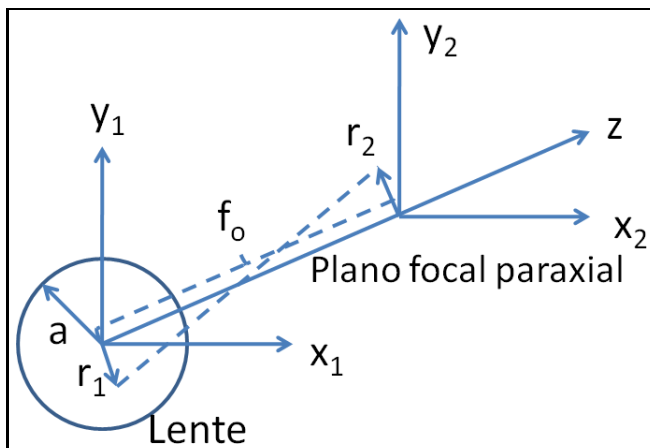


Figura 1.27: Las coordenadas de la lente están caracterizadas por (x_1, y_1) , las coordenadas del plano focal por (x_2, y_2) .

Sobre la lente incide un pulso de luz formado por la superposición de ondas planas monocromáticas cuya amplitud está determinada por $A(\Delta\omega)$. La iluminación está determinada por la función U_0 , en el desarrollo de este trabajo la iluminación siempre será uniforme e igual a 1 y estará limitada por la pupila $P(x_1, y_1)$. En el marco de la óptica de Fourier, el campo a la distancia z frente a la lente que ha sido afectado por el cambio de fase producido por la lente y la aberración esférica, está dado por:

$$U(x_2, y_2, z, \Delta\omega) \approx \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dy_1 P(x_1, y_1) U_0(x_1, y_1) A(\Delta\omega) \times \Phi(x_1, y_1) e^{-i\Theta(x_1, y_1)} e^{i\frac{k_a}{2z}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]} \quad (1.127)$$

Las funciones que se indican en la ecuación (1.127), son las siguientes:

- P : función pupila
- U_0 : iluminación (uniforme)
- Θ : aberración esférica
- Φ : fase producida por la lente
- A : amplitud del pulso (gaussiano)

El cambio de fase producido por la lente y por la propagación de la onda en el aire, está descrito por el término de fase

$$\Phi(x_1, y_1) = e^{ik_\ell n_\ell d} \exp \left\{ -i(k_\ell n_\ell - k_a) \frac{(x_1 + y_1)^2}{2} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \right\} \quad (1.128)$$

donde k_ℓ denota el número de onda en la lente y k_a denota el número de onda en el aire. R_1 y R_2 son los radios de curvatura de la superficie de la lente y d es el grosor de la lente a lo largo del eje óptico.

Un pulso de luz láser es caracterizado por su frecuencia central o frecuencia de la onda portadora ω_0 y su ancho de banda $\Delta\omega$ alrededor de ω_0 . Típicamente $\Delta\omega \ll \omega_0$, por lo que podemos estudiar la evolución del pulso en el tiempo expandiendo $\omega(k)$ alrededor del valor k_0 en términos de la serie de Taylor, o el número de onda con respecto a la frecuencia. La expansión puede tomarse hasta cierto orden, al tomarlo hasta segundo o tercer orden, se describen los efectos de GVD de segundo y tercer orden.

Expandiendo el número de onda alrededor de la frecuencia central ω_0 a tercer orden, el número de onda queda expresado por:

$$\begin{aligned} k_\ell n_\ell &= \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0) + \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{c} n(\omega) \right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) \\ &+ \frac{1}{2} \frac{d^2}{d\omega^2} \left(\frac{\omega}{c} n(\omega) \right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \\ &+ \frac{1}{6} \frac{d^3}{d\omega^3} \left(\frac{\omega}{c} n(\omega) \right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^3 \end{aligned} \quad (1.129)$$

donde $\omega - \omega_0 = \Delta\omega$ describe el intervalo de frecuencias que forman al pulso. Si la expansión se realiza hasta el segundo orden, el último renglón de la ecuación (1.129) no aparece. Con esta expansión se puede analizar la propagación temporal del pulso. A continuación se presenta de forma breve un análisis de las modificaciones que sufre el campo hasta la posición z frente a la lente sobre el eje óptico de la misma. El desarrollo completo, a segundo y tercer orden se encuentra en el apéndice *A* y *B* respectivamente.

$$k_\ell n_\ell = \frac{\omega}{c} n(\omega) \approx k_0 n_0 [1 + a_1 \Delta\omega + a_2 (\Delta\omega)^2 + a_3 (\Delta\omega)^3] \quad (1.130)$$

donde $\Delta\omega$ es el ancho espectral del pulso incidente, y los factores a_1 , a_2 , y a_3 , están definidos en las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} a_1 &\equiv \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{n_0} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \\ a_2 &\equiv \frac{1}{\omega_0 n(\omega_0)} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2n(\omega_0)} \frac{d^2 n(\omega)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} \\ a_3 &\equiv \frac{1}{2\omega_0 n(\omega_0)} \frac{d^2 n(\omega)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{6n(\omega_0)} \frac{d^3 n(\omega)}{d\omega^3} \Big|_{\omega=\omega_0} \end{aligned} \quad (1.131)$$

La diferencia entre el número de onda en la lente por el índice de refracción de la lente y el número de onda en el aire por el índice de refracción en el aire, que permite calcular el cambio de fase producido por la lente y por la propagación de la onda en el aire, se puede expresar por la relación:

$$k_\ell n_\ell - k_a n_a = \frac{\omega}{c} [n(\omega) - 1] \approx k_0 (n_0 - 1) [1 + b_1 \Delta\omega + b_2 (\Delta\omega)^2] \quad (1.132)$$

Donde el número de onda k_0 es igual al número de onda evaluado para la frecuencia de la onda portadora $k_0 = k(\omega_0)$ y el índice de refracción n_0 , también se evalúa para la frecuencia de la onda portadora, $n_0 = n(\omega_0)$. Los valores $b_{1,2}$ pueden obtenerse de $a_{1,2}$ reemplazando n_0 por $n_0 - 1$, donde se ha aproximado el valor del índice de refracción del aire, $n_a \approx 1$, que corresponde al vacío. El desarrollo completo de estas operaciones se tiene en el apéndice A y B. La distancia focal de la lente para la frecuencia ω_0 esta descrita por

$$\frac{1}{f_0} = (n_0 - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (1.133)$$

Si la lente funciona como pupila, descrita por una abertura circular de radio ρ , entonces $\rho = a$ y la pupila puede ser descrita por:

$$P(x_1, y_1) = \begin{cases} 1 & x_1^2 + y_1^2 = r_1^2 = (\rho r)^2 \quad \text{donde } r \in [0, 1] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (1.134)$$

Debido a la simetría circular de la pupila, es conveniente definir coordenadas polares (r, θ) , donde

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2} \quad \tan(\theta) = y_1/x_1$$

y además se introducen las coordenadas ópticas [15], donde r_2 es la coordenada radial en el plano imagen y z es la coordenada sobre el eje óptico medida a partir del foco paraxial, de tal forma, que si $z = f_0$ la coordenada u toma el valor de cero

$$u \equiv \rho^2 k_0 \left(\frac{1}{f_0} - \frac{1}{z} \right), \quad v \equiv \frac{\rho r_2 k_0}{f_0},$$

el número de Fresnel esta definido por:

$$N = \rho^2 k_0 / 2f_0$$

Además se supone que el pulso tiene una modulación gaussiana, por lo que

$$A(\Delta\omega) = A_0 e^{-\left(\frac{T\Delta\omega}{2}\right)^2}$$

donde T es la duración del pulso, medida en el campo a $1/e$. Una vez que se ha integrado sobre el ángulo θ , el campo a la distancia z frente a la lente, esta descrito por la expresión:

$$\begin{aligned} U(u, v, \Delta\omega) &= A_0 \int_0^1 r dr U_0(r) e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} \\ &\times e^{i\Delta\omega(\tau' - r^2\tau)} e^{-(\Delta\omega)^2 \left[\frac{T^2}{4} - i(\delta' - r^2\delta) \right]} e^{i(\Delta\omega)^3 (\gamma' - r^2\gamma)} \\ &\times e^{\left[\frac{iv^2}{4N} \right] \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)} e^{-i\frac{r^2 u}{2}} J_0 \left(vr \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \right) \end{aligned} \quad (1.135)$$

donde J_0 es la función de Bessel de orden cero. En la ecuación (1.135), se han definido los siguientes parámetros:

$$\tau' \equiv k_0(n_1d_1a_1^1 + n_2d_2a_1^2) \quad (1.136)$$

$$\delta' \equiv k_0(n_1d_1a_2^1 + n_2d_2a_2^2) \quad (1.137)$$

$$\gamma' \equiv k_0(n_1d_1a_3^1 + n_2d_2a_3^2) \quad (1.138)$$

$$\tau \equiv \frac{k_0\rho^2}{2} \left(\frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_2^1}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_2^1}{R_3} - \frac{k_0\rho^2}{2\omega_0 f_0} \right) + \frac{u}{2\omega_0}$$

$$\tau \equiv PTD + \frac{u}{2\omega_0} \quad (1.139)$$

$$\delta \equiv \frac{\rho^2 k_0}{2} \left(\frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_3} \right) \quad (1.140)$$

$$\gamma \equiv \frac{\rho^2 k_0}{2} \left(\frac{(n_{01}-1)b_3^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_3^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_3^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_3^2}{R_3} \right) \quad (1.141)$$

Estos parámetros se pueden leer en el trabajo de Kempe [15], únicamente el primer término del parámetro τ , es el término que describe la diferencia del tiempo de propagación PTD. Por lo que, en la ecuación (1.139) lo hemos escrito explícitamente, ya que en el artículo de Kempe, solo menciona que τ es el término relacionado con PTD.

La amplitud en términos del tiempo se obtiene calculando la transformada de Fourier de esta última relación, de tal manera que

$$U(u, v, t) \propto \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) e^{-i\Delta\omega t} U(u, v, \omega) \quad (1.142)$$

Haciendo el cálculo correspondiente y considerando que el ancho de frecuencias es mucho menor a la frecuencia central, i.e. $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$, se puede expresar la amplitud del campo como

$$\begin{aligned} U(u, v, t) &\propto A_0 \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) \int_0^1 r dr U_0(r) A(\omega) e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1d_1+n_2d_2)} \\ &\times e^{-(\Delta\omega)^2 [\frac{T^2}{4} - i(\delta' - r^2\delta)]} e^{-i\Delta\omega[t - \tau' + \tau(u)r^2]} e^{i(\Delta\omega)^3(\gamma' - r^2\gamma)} \\ &\times J_0(rv) e^{-\frac{iur^2}{2}} \end{aligned} \quad (1.143)$$

Considerando la iluminación uniforme tal que $U_0(r) = 1$, se obtiene

$$\begin{aligned} U(u, v, t) &\propto \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) \int_0^1 r dr e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1d_1+n_2d_2)} \\ &\times e^{-(\Delta\omega)^2 [\frac{T^2}{4} - i(\delta' - r^2\delta)]} e^{-i\Delta\omega[t - \tau' + \tau(u)r^2]} e^{i(\Delta\omega)^3(\gamma' - r^2\gamma)} \\ &\times J_0(rv) e^{-\frac{iur^2}{2}} \end{aligned} \quad (1.144)$$

Los parámetros τ , τ' tienen las dimensiones de tiempo δ , δ' de tiempo al cuadrado y γ , γ' de tiempo al cubo. Estos valores están determinados por la frecuencia central ω_0 del pulso y los parámetros de la lente f_0 y n_0 , a la frecuencia de la onda portadora.

Los términos de fase que contienen δ y δ' son causados por la dispersión de la velocidad de grupo GVD, dentro del material de la lente y se identifican como el efecto de GVD de segundo orden. El término $\delta'(\Delta\omega)^2$ es la responsable de la modulación de la fase obtenida por un pulso cuando ha pasado por el eje óptico de la lente, donde el grosor es d . El término de fase $\delta r^2(\Delta\omega)^2$ causa un chirp que depende de r y es un resultado del enfocamiento de la lente. El ensanchamiento del pulso a segundo orden puede evitarse con un dispositivo compuesto por un par de prismas [54].

Los términos de fase que contienen γ y γ' son causados por la dispersión de la velocidad de grupo GVD de tercer orden. Estos términos cobran mayor importancia cuando la duración del pulso es menor a 20fs, esto se muestra en el capítulo 5. Cuando se toma la expansión del número de onda hasta el segundo orden, estos términos no aparecen en el desarrollo.

La relación (1.144) muestra un retraso en tiempo, τ' , en la amplitud de las ondas parciales, lo que contribuye al patrón de difracción. Este retardo que es independiente del radio r , i.e. τ' no es de interés en esta discusión, pues sólo provoca un corrimiento en el tiempo en el que llega el pulso a la posición z sobre el eje óptico y no provoca una distorsión del pulso.

El retraso $\tau - u/2\omega_0$, en el plano focal es igual al retraso en el tiempo entre el frente del pulso (o el frente descrito por la superficie de intensidad máxima) y el frente de fase (descrito por la superficie de fase constante). Este retraso es el efecto como PTD o diferencia en el tiempo de propagación.

Cuando se realiza la expansión hasta el segundo orden y se toma la aproximación $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$, la integral sobre las frecuencias tiene solución analítica, y el campo difractado en la región paraxial tiene la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 U(u, v, t) &= \int_0^1 r dr e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} e^{i(\frac{v^2}{4N} - \frac{r^2 u}{2})} \\
 &\times J_0(vr) \sqrt{\frac{\pi}{(T^2/4) - i(\delta' - r^2\delta)}} e^{\frac{(t - \tau' + r^2\tau)^2}{T^2 - 4i(\delta' - r^2\delta)}}
 \end{aligned} \tag{1.145}$$

Por lo que debe resolverse la integral en espacio con ayuda de un método numérico. En este trabajo no consideraremos el efecto de GVD de segundo orden, pues este efecto puede corregirse con un par de prismas, por lo que los términos de δ y δ' no aparecen en nuestra expresión final del campo difractado

$$\begin{aligned}
 U(u, v, t) &= \int_0^1 r dr e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} e^{i(\frac{v^2}{4N} - \frac{r^2 u}{2})} \\
 &\times J_0(vr) \sqrt{\frac{\pi}{(T^2/4)}} e^{\frac{(t - \tau' + r^2\tau)^2}{T^2}}
 \end{aligned} \tag{1.146}$$

En los capítulos siguientes a esta expresión se ha llamado "la solución analítica en las frecuencias".

Cuando se toma la expansión del número de onda a tercer orden, la expresión del campo difractado es (1.144), en este caso, la integral en frecuencias no tiene una solución analítica, por lo que la solución en espacio y en frecuencias, debe encontrarse con algún método numérico.

A partir de la expresión del campo difractado, podemos determinar la intensidad del pulso en tiempo y en espacio, las cuales están determinadas por las expresiones [110, 111]:

$$I(t) \propto \int_0^\infty dv v |U(v, t)|^2 \quad (1.147)$$

$$I(v) \propto \int_{-\infty}^\infty dt |U(v, t)|^2 \quad (1.148)$$

El término de v en la expresión de $I(t)$ se debe al jacobiano de las coordenadas polares.

1.12. Segundos momentos, como medida del ensanchamiento espacial y temporal

Para medir la duración temporal de un pulso con un perfil gaussiano, se puede usar un criterio de medición como el medir a $1/e$ del perfil de intensidad dando la medida T_{int} . Sin embargo, por el efecto de GVD, el pulso se parte perdiendo su forma gaussiana y se debe usar otra forma de medir el ancho del pulso, tanto en espacio como en tiempo. Para pulsos que no tienen una forma gaussiana, es mejor tomar la medición del ancho del pulso con ayuda de los segundos momentos del campo eléctrico. De manera general siendo $f(x)$ una función que depende de la variable x , el momento de orden n para x , está definido por, [82]:

$$\langle x^n \rangle = \frac{\int_{-\infty}^\infty x^n |f(x)|^2 dx}{\int_{-\infty}^\infty |f(x)|^2 dx} \quad (1.149)$$

Un buen criterio para el ancho de la distribución es la desviación cuadrática media, definida por:

$$\langle \Delta x \rangle = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (1.150)$$

La representación explícita en el dominio del tiempo (t) y espacio (v), está determinada por:

$$\langle \tau_p \rangle' = \left[\frac{1}{\mathcal{W}_p} \int_{-\infty}^\infty t^2 I(t) dt - \frac{1}{\mathcal{W}_p^2} \left(\int_{-\infty}^\infty t I(t) dt \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.151)$$

$$\langle \tau_v \rangle' = \left[\frac{1}{\mathcal{W}_v} \int_{-\infty}^\infty v^2 I(v) dv - \frac{1}{\mathcal{W}_v^2} \left(\int_{-\infty}^\infty v I(v) dv \right)^2 \right]^{1/2} \quad (1.152)$$

Donde \mathcal{W} en espacio es:

$$\mathcal{W}_v = \int_{-\infty}^{\infty} dv |U(v, t)|^2 \quad (1.153)$$

y en tiempo:

$$\mathcal{W}_p = \int_0^{\infty} dt |U(v, t)|^2. \quad (1.154)$$

Si un pulso de duración temporal T_{int} viaja a través de una lente, sufrirá un ensanchamiento en espacio por las aberraciones de la lente y en tiempo por la dispersión de la velocidad de grupo y la diferencia del tiempo de propagación, de tal forma que el pulso después de la lente, tendrá un ancho temporal igual a $\langle \tau_p \rangle'$ y en espacio igual a $\langle \tau_v \rangle'$. Si el pulso ha pasado por una lente ideal, para luz pulsada (aquella que no produce ensanchamiento por los efectos de PTD, GVD y que no tiene aberraciones), no sufrirá estos ensanchamientos por lo que la cantidad

$$\langle \tau_p \rangle \equiv \frac{\langle \tau_p \rangle'}{T_{int}}$$

tendrá el valor de 1. De manera similar, si el pulso no es ensanchado en espacio, tal que la imagen de éste en la posición del foco paraxial está limitada por difracción, en cuyo caso el ancho en espacio vale $\langle \tau_v \rangle_0$, el valor de

$$\langle \tau_v \rangle = \frac{\langle \tau_v \rangle'}{\langle \tau_v \rangle_0}$$

será igual a 1.

Ahora se tiene la medida del ensanchamiento en espacio y en tiempo del pulso aún cuando este no tenga una forma gaussiana. **Definimos** la "calidad de la señal" S , como el inverso de las cantidades, $\langle \tau_p \rangle$ y $\langle \tau_v \rangle$ tal que

$$S \equiv \frac{1}{\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle} \quad (1.155)$$

De tal manera que el valor máximo de la calidad de la señal es 1. El valor 1 se obtendrá cuando el pulso esté limitado por difracción y no sufra distorsión temporal por el efecto de PTD y GVD.

Método de integración de Gauss-Legendre

Para estudiar el campo eléctrico de un pulso de luz, cuando este ha sido enfocado por una lente, considerando el efecto de GVD de tercer orden, es necesario resolver dos integrales, una sobre el espacio r y otra sobre las frecuencias ω , que se describen en la ecuación (1.144). Cuando se hace la expansión del número de onda hasta segundo orden y la aproximación $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$, la integral sobre frecuencias tiene solución analítica, pero la integral en el espacio debe resolverse numéricamente. Se ha encontrado que el método de rectángulos da resultados confiables (por comparación con los resultados reportados por Kempe *et.al.* [15]), en un tiempo de 36 minutos. Para cuando la expansión del número de onda se toma hasta tercer orden, la integral sobre las frecuencias requiere una solución numérica, sin embargo, el método de rectángulos da resultados en un tiempo de aproximadamente seis días, por lo que su uso es altamente ineficiente. En la búsqueda por un método que redujera el tiempo de cálculo se estudio un método recursivo propuesto por Rosete *et.al.* [51], cuyos resultados fueron verificados numéricamente en la propagación de un pulso a través de un pedazo de vidrio. Sin embargo, errores numéricos en el método para pulsos con duración menor a 15 femtosegundos propagándose distancias mayores a 10mm a través de un material altamente dispersivo, limitó su uso en la propagación de pulsos ultracortos a través de lentes.

Dado este escenario, se buscó un método de cuadratura, que diera resultados confiables en un tiempo aceptable para resolver la integral sobre las frecuencias y encontramos que el método de cuadraturas de Gauss-Legendre ha cumplido con estas expectativas. A continuación se expone como se determina su algoritmo en el intervalo $(-1, 1)$ y como puede ser extendido a cualquier otro intervalo.

Si comparamos el método de integración de Gauss-Legendre con otros métodos como el de Simpson o el trapecio, el método de cuadraturas de Gauss-Legendre, es el método que proporciona la respuesta más confiable con el menor número de pasos [89, 103]. La regla

de Gauss-Legendre con \mathcal{N} nodos es exacta para funciones polinomiales de grado igual o menor a $2\mathcal{N} - 1$ y su fórmula de cuadratura para alguna función f continua en $[-1, 1]$ es:

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} w_{\mathcal{N},k} f(x_{\mathcal{N},k}) + E_{\mathcal{N}}(f) \quad (2.1)$$

Donde la función f es evaluada en los valores fijos $x_{\mathcal{N},k}$ y multiplicada por el factor de peso $w_{\mathcal{N},k}$ correspondiente a ese nodo. Los nodos $x_{\mathcal{N},k}$ y los pesos $w_{\mathcal{N},k}$ que hay que usar, están tabulados y pueden conseguirse fácilmente en manuales de funciones matemáticas [90]. Los nodos son de hecho las raíces de los polinomios de Legendre y los pesos correspondientes se obtienen resolviendo un sistema de ecuaciones lineales.

El error se calcula de la siguiente manera:

$$E_{\mathcal{N}}(f) = \frac{f^{2\mathcal{N}}(c)2^{2\mathcal{N}-1}(N!)^4}{((2\mathcal{N})!)^3((2\mathcal{N} + 1))!} \quad (2.2)$$

Donde se evalúa la derivada $2\mathcal{N}$ de la función f en algún punto c que este dentro del intervalo $[-1, 1]$. Mientras el número \mathcal{N} sea mayor, el error disminuye considerablemente.

2.1. Traslación del método de Gauss-Legendre

Suponiendo que tenemos los nodos $\{x_{\mathcal{N},k}\}_{k=1}^{\mathcal{N}}$ y los pesos $\{w_{\mathcal{N},k}\}_{k=1}^{\mathcal{N}}$, necesarios para aplicar la regla de Gauss-Legendre con \mathcal{N} nodos en el intervalo $[-1, 1]$. Entonces para aplicar el método de Gauss-Legendre al intervalo $[a, b]$, se puede usar el cambio de variable

$$t = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x \quad \text{con} \quad dt = \frac{b-a}{2}dx \quad (2.3)$$

con ello se obtiene

$$\int_a^b f(t)dt = \int_{-1}^1 f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x\right) \frac{b-a}{2}dx \quad (2.4)$$

lo que proporciona la fórmula de cuadratura

$$\int_a^b f(t)dt = \frac{b-a}{2} \sum_{k=1}^{\mathcal{N}} w_{\mathcal{N},k} f\left(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}x_{\mathcal{N},k}\right) + E_{\mathcal{N}}(f) \quad (2.5)$$

Las fórmulas de integración de Gauss-Legendre tienen una precisión muy alta, con un número \mathcal{N} de nodos, se tiene una precisión de $n = \mathcal{N} + 1$, esto debe tenerse en cuenta si hay que realizar muchas integrales de funciones parecidas sobre un mismo intervalo, para determinar el grado de precisión que deseamos, considerando el tiempo de ejecución del programa y la estimación del error. Después que se determina el número \mathcal{N} de nodos

necesarios para obtener dichas integrales con la precisión deseada, es posible usar la regla de Gauss-Legendre con \mathcal{N} nodos para calcular todas las integrales.

Los nodos y los pesos son almacenados en dos matrices, llamadas \mathcal{A} y \mathcal{W} respectivamente. En el programa que se muestra a continuación se consideran 7 nodos y pesos, i.e. $\mathcal{N} = 7$, y esta escrito dentro del lenguaje de programación MATLAB.

```
%.....Integral de Gauss-Legendre con 7 nodos....
format long
a=-0.377745;      %límite inferior
b=0.377745;      %límite superior
c=(b-a)/2;
d=(a+b)/2;
q=40.5758;        %datos del problema
r=190.711;

% los nodos:
A=[0.94910  -0.94910  0.74153  -0.74153  ...
   0.40584  -0.40584  0.00000];

% los pesos
W=[0.12948  0.12948  0.27970  0.27970  ...
   0.38183  0.38183  0.41795];

% La función a evaluar es:
% f(x)=exp(q*x^2 + i*r*x^3)

for i=1:7
    x(i)=d + c*A(i);      %cálculo del nuevo argumento
    f(i)=I*r*(x(i))^3;    %término asociado a r
    g(i)=-q*((x(i))^2) ;  %término asociado a q
    k(i)=f(i)+g(i);      %suma de los términos anteriores
    e(i)=exp(k(i));       %calculo de la exponencial
    h(i)= W(i)*e(i);     %se multiplica por el valor correspondiente
                          del peso
end
H1=[h];                  %se crea el vector h, cuyas entradas son
                          el resultado de cada iteración
H2=sum(H1);              %suma de todas las componentes de h
Int=c*H2                  %se multiplica por la diferencia del intervalo entre 2,
                          %obteniendose el resultado final de la integral
```

2.2. Análisis de parámetros

En esta sección se estudia la validez del método de integración de Gauss-Legendre. Para determinar la validez, se han comparado los valores de los segundos momentos del campo eléctrico en tiempo $\langle \tau_p \rangle$ y espacio $\langle \tau_v \rangle$, obtenidos con la solución analítica de la integral de frecuencias y obtenidos cuando la integral se resuelve usando el método de Gauss-Legendre, cuando el número de onda se expande hasta segundo orden.

Del análisis de los valores de los segundos momentos del campo eléctrico, se determinan los parámetros que son necesarios en el algoritmo que determina el perfil de intensidad en la región focal después de que el pulso de luz se ha propagado por la lente. Sabemos que se deben realizar dos integrales para obtener el campo difractado, una en espacio denotado por la variable r y la otra en frecuencias ω , si además deseamos conocer el valor de la intensidad en el dominio del tiempo y del espacio, debemos realizar dos integrales más, para encontrar $I(t)$ e $I(v)$, dando un total de cuatro integrales, cada una de estas integrales se han obtenido por medio de ciclos *for*. La integral para conocer el campo difractado en espacio, i.e. sobre r , fue resuelta por medio del método de rectángulos, modelado por un ciclo *for* dentro de MATLAB, N_r denota el valor de las iteraciones en el espacio. Por medio de un análisis se ha determinado que 64 iteraciones son suficientes para encontrar un resultado confiable, i.e. $N_r=64$, esto se ha determinado por comparación con los resultados expuestos en el artículo [15]. El número de iteraciones necesarias para resolver la integral sobre ω utilizando el algoritmo de Gauss-Legendre, \mathcal{N} se ha determinado por ensayo y error, encontrándose que son necesarios 96 nodos y pesos en las matrices \mathcal{A} y \mathcal{W} . Una vez determinados estos valores, se deben tomar un número de iteraciones para encontrar el valor de las integrales $I(t)$ e $I(v)$, las cuales fueron resueltas con el método de rectángulos. Para $I(v)$, el número de iteraciones esta especificado por el valor N_v , y para $I(t)$ por N_t . A continuación se muestran los resultados de los segundos momentos del campo eléctrico, calculados por la integral analítica y de Gauss-Legendre en las frecuencias, dependiendo de los valores N_v y N_t .

Se ha realizado el estudio de un pulso propagándose por una lente simple de BK7 cuyo semidiámetro es de 6mm y la distancia focal es de 30mm, la duración del pulso es de 10fs y tiene una longitud de onda de la portadora igual a $\lambda_0 = 810\text{nm}$, se ha considerado que la lente es iluminada de manera uniforme por el haz pulsado.

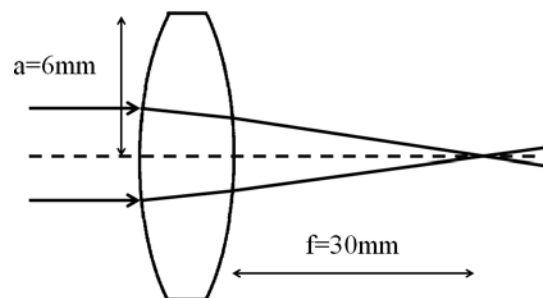
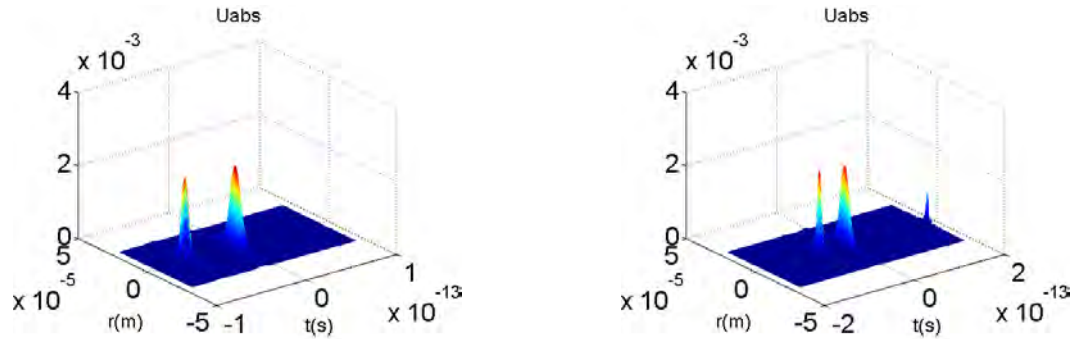


Figura 2.1: Lente simple de BK7, cuya apertura numérica es $NA=0.20$

Como se ha mencionado anteriormente, el número de onda se expande hasta el segundo orden en las frecuencias alrededor de la frecuencia central. En las siguientes figuras se muestran los pulsos en el foco paraxial de la lente simple BK7. Se ha supuesto que la dispersión de velocidad de grupo (GVD) es cero para todos los órdenes, y solo se considera el efecto que produce la aberración esférica ($A=1$) y la diferencia del tiempo de propagación (PTD=1). En el cálculo de la integral analítica en frecuencias, se han considerado los parámetros $N_v=N_t=256$, y para el método de Gauss-Legendre se han considerado $N_v=N_t=512$, con ello se han obtenido los siguientes datos.



BK7, $z=z_{foco}$			
	$N_v=N_t$	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle'$
I. Analítica	256	6.4453	2.0184×10^{-5}
M. Gauss-Legendre	512	11.815	2.0184×10^{-5}

Figura 2.2: La primer figura muestra la distribución de la intensidad del pulso en el foco paraxial, obtenido con la solución analítica a la integral sobre la frecuencia ($N_v=N_t=256$), la segunda se ha obtenido con la solución obtenida con el método de Gauss-Legendre de la misma integral sobre las frecuencias ($N_v=N_t=512$). $T_{int} = 10\text{fs}$, $\lambda_0 = 810\text{nm}$, PTD=1, $A=1$, GVD=0.

Los resultados mostrados, indican un error numérico en el método de Gauss-Legendre. Analizando los datos, los errores numéricos en el ancho espacial son despreciables, pero no para el ancho temporal.

Para determinar si el programa donde se calcula la integral sobre las frecuencias de manera analítica da valores diferentes a los expuestos con $N_v=N_t=256$, se corrió el programa con $N_v=N_t=512$. Los resultados con $N_v=N_t=512$ fueron los siguientes $\langle \tau_p \rangle = 6,44$ y $\langle \tau_v \rangle' = 2,01 \times 10^{-5}$. Estos resultados nos dejan ver un comportamiento asintótico a los valores $\langle \tau_p \rangle = 6,44$ y $\langle \tau_v \rangle' = 2,01 \times 10^{-5}$, por lo que es necesario analizar los valores obtenidos con la solución obtenida usando el método de Gauss-Legendre al calcular la integral y diferentes valores de N_v y N_t .

A continuación se comparan los resultados al tomar los valores $N_v=N_t=400$ en ambas integrales.

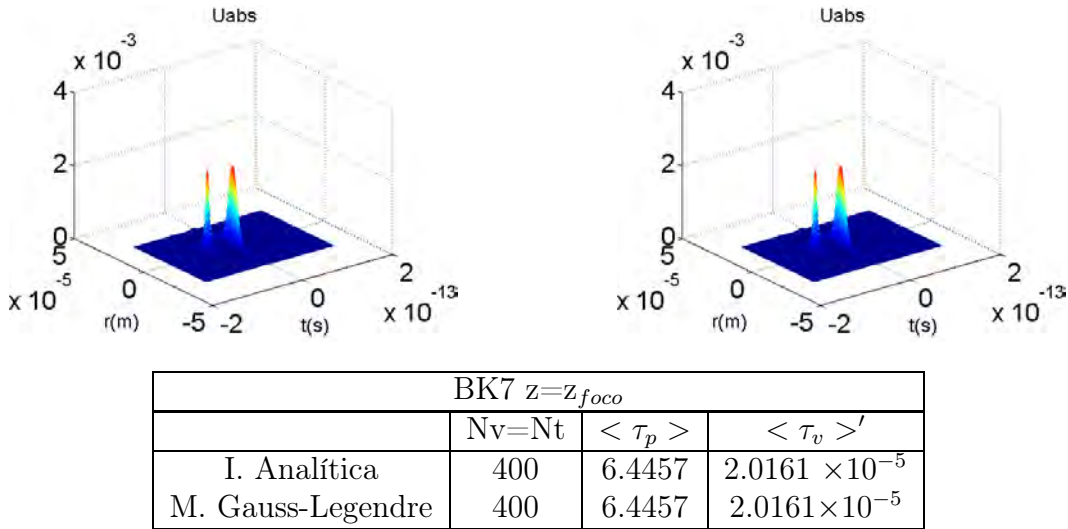


Figura 2.3: Tomando $N_v=N_t=400$ se comparan los resultados obtenidos con la solución analítica y el método de Gauss-Legendre. $T_{int} = 10\text{fs}$, $\lambda_0 = 810\text{nm}$, $PTD=1$, $A=1$, $GVD=0$.

Tomando ahora $N_v=N_t=700$, para un pulso de 10fs, que se propaga por la lente de BK7 con diámetro $d = 12\text{mm}$, considerando la aberración esférica y la diferencia del tiempo de propagación. Podemos ver el perfil de intensidad (U_{abs}) y los valores de $\langle \tau_p \rangle$ y $\langle \tau_v \rangle'$.

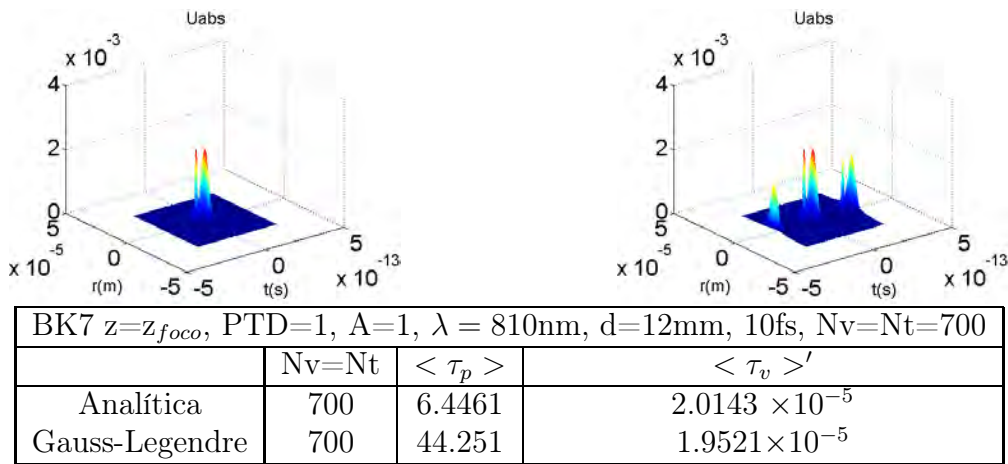


Figura 2.4: Se comparan los segundos momentos en espacio y tiempo obtenidos de la solución analítica a la integral de frecuencias (primera figura) y con la de Gauss-Legendre (segunda figura), con $N_v=N_t=700$ para la lente de 12mm de diámetro, $T_{int} = 10\text{fs}$, $\lambda = 810\text{nm}$. $PTD=1$, $A=1$, $GVD=0$.

En el siguiente caso, se han tomado las mismas características de la lente $f=30\text{mm}$, $PTD=1$, $A=1$, el pulso ilumina de manera uniforme a la lente, pero considerando que la lente tiene un diámetro $d=10\text{mm}$, que la longitud de onda de la portadora ahora tiene

el valor $\lambda = 620\text{nm}$, el pulso tiene una duración de 6fs y $N_v=N_t=700$. Se comparan los resultados obtenidos a segundo orden en la expansión del número de onda.

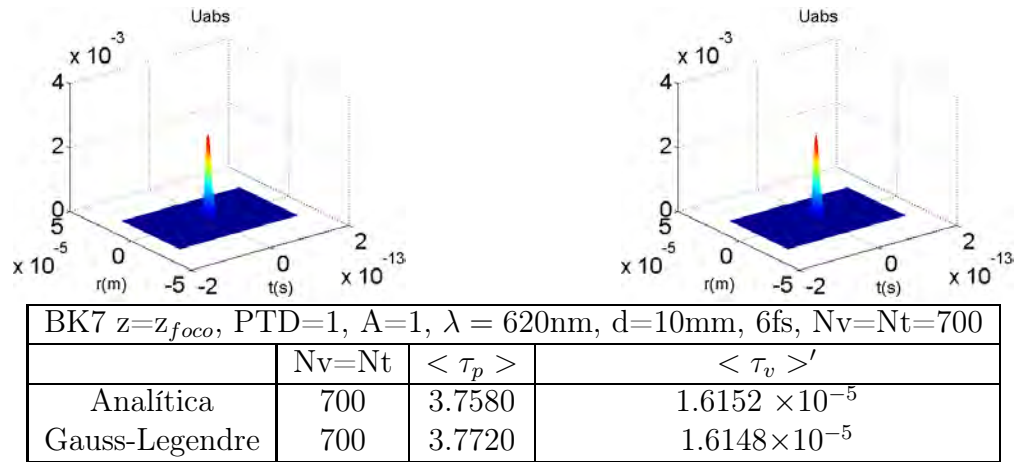


Figura 2.5: Distribución de la intensidad en la posición focal. Se comparan los segundos momentos obtenidos a segundo orden con la solución analítica a la integral de frecuencias (primer figura) y con la de Gauss-Legendre (segunda figura), con $N_v=N_t=700$ para la lente de 10mm de diámetro, $T_{int}=6\text{fs}$, $\lambda = 620\text{nm}$. PTD=1, A=1, GVD=0.

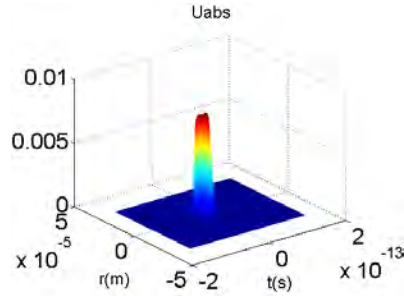
Con estos resultados concluimos que la integración de Gauss-Legendre es sensible a los parámetros de estudio. Por lo que de los valores de N_v y N_t , son una cantidad importante a determinar en la búsqueda de un resultado confiable. Mientras que si el pulso tiene una longitud de onda de la portadora $\lambda = 620\text{nm}$, una duración de 6fs y se propaga por una lente cuyo diámetro es 10mm, los resultados en los anchos temporales y espaciales con $N_v=N_t=700$, coinciden para la solución analítica y la de Gauss-Legendre, pero difieren para el caso de $\lambda = 810\text{nm}$, duración del pulso de 10fs y un diámetro de la lente de 12mm.

Para determinar cual de los parámetros usados es el que afecta el resultado a continuación se estudian tres casos, tomando el siguiente conjunto de valores ($T_{int}=6\text{fs}$ - $\lambda_0 = 620\text{nm}$ - $d=10\text{mm}$ - $N_v=N_t=700$), analizaremos los siguientes casos:

- Caso 1: $T_{int}=6\text{fs}$ - $\lambda_0 = 810\text{nm}$ - $d=10\text{mm}$
- Caso 2: $T_{int}=6\text{fs}$ - $\lambda_0 = 620\text{nm}$ - $d=12\text{mm}$
- Caso 3: $T_{int}=10\text{fs}$ - $\lambda_0 = 620\text{nm}$ - $d=10\text{mm}$

En este caso hemos considerado PTD=1, A=0, GVD=0, la iluminación sobre la lente es uniforme. Cada uno de ellos se obtiene con $N_v=N_t=700$ y $N_v=N_t=400$. Los resultados son los siguientes:

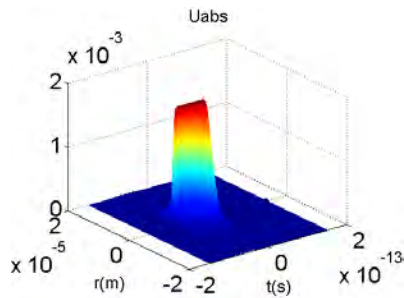
- Caso 1: 6fs - $\lambda = 810\text{nm}$ - $d=10\text{mm}$ - $N_v=N_t=700$



BK7 $z=z_{foco}$, PTD=1, A=0			
	$N_v=N_t$	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle'$
Analítica	400	5.7863	1.3134×10^{-5}
Analítica	700	5.7861	1.3131×10^{-5}
Gauss-Legendre	700	5.7887	1.3125×10^{-5}

Figura 2.6: Los resultados obtenidos en el caso 1. Se muestra la distribución de intensidad del pulso obtenido con el método de Gauss-Legendre.

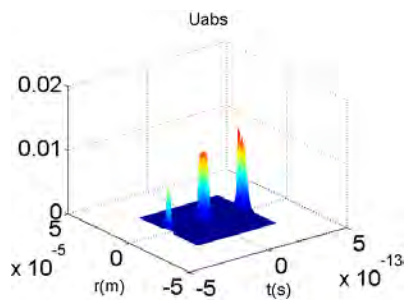
- Caso 2: $6fs-\lambda = 620nm-d=12mm- N_v=N_t=700$



BK7 $z=z_{foco}$, PTD=1, A=0			
	$N_v=N_t$	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle'$
Analítica	400	11.771	1.2193×10^{-5}
Analítica	700	11.771	1.2190×10^{-5}
Gauss-Legendre	700	11.939	1.2199×10^{-5}

Figura 2.7: Los resultados obtenidos en el caso 2. Se muestra la distribución de intensidad del pulso obtenido con el método de Gauss-Legendre.

- Caso 3: $10fs-\lambda = 620nm-d=10mm- N_v=N_t=700$

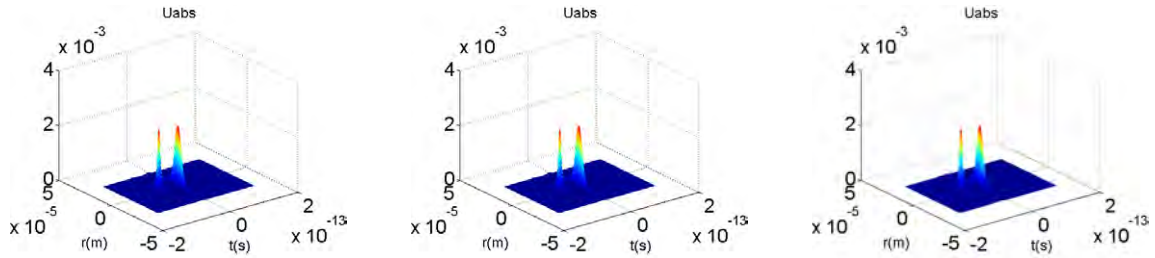


BK7 $z=z_{foco}$, PTD=1, A=0			
	$N_v=N_t$	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle'$
Analítica	400	4.9947	8.9400×10^{-6}
Analítica	700	4.9946	8.9386×10^{-6}
Gauss-Legendre	700	38.194	8.7590×10^{-6}

Figura 2.8: Los resultados obtenidos en el caso 3. Se muestra la distribución de intensidad del pulso obtenido con el método de Gauss-Legendre.

Por los resultados expuestos, concluimos que el manejo de los valores N_v y N_t , y la duración del pulso son determinantes en los resultados, hay que elegirlos de manera adecuada, teniendo como base los resultados de la solución analítica a la integral sobre las frecuencias.

A continuación se expone la distribución de la intensidad para cuando el valor de Nt y Nv es igual a 400, $Nr=64$, considerando tres métodos de integración: la solución analítica en la integral de frecuencias, con el método de Gauss-Legendre y usando el método de rectángulos. Se comparan los valores obtenidos de los segundos momentos en tiempo y espacio, y también se compara el tiempo de cálculo en minutos en cada caso, los resultados se exponen en la tabla (2.9).



BK7 $z=z_{foco}$, 96 nodos, $Nv=Nt=400$, $Nr=64$			
Método de Integración	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle'$	$t_{calculo}(\text{min})$
Analítica	6.4457	2.0161×10^{-5}	36
Gauss-Legendre	6.4457	2.0161×10^{-5}	70
Rectángulos	5.8349	2.0319×10^{-5}	8709

Figura 2.9: Segundos momentos en tiempo y espacio, obtenidos con tres métodos de integración. Los valores mostrados corresponden a pulsos que se han propagado hasta la posición del foco paraxial de la lente de BK7 indicada. Se muestra la distribución de la intensidad para cada caso, en el mismo orden. $T_{int} = 10\text{fs}$, $\lambda_0 = 810\text{nm}$, $PTD=1$, $A=1$, $GVD=0$.

De los resultados expuestos en la tabla (2.9), podemos determinar que el método de Gauss-Legendre con 96 nodos proporciona los mismos resultados que la integral analítica en las frecuencias. Los resultados obtenidos con el método de rectángulos en las frecuencias, difieren del resultado analítico. El tiempo de cálculo con el método de Gauss-Legendre es 95 % menor que el tiempo de cálculo con el método de rectángulos.

Debido a los resultados encontrados, hemos considerado obtener los resultados del campo difractado con ayuda de la integral de Gauss-Legendre con los parámetros, $Nv = Nt = 400$ y $Nr = 64$.

También se ha estudiado el ancho de frecuencias $\Delta\omega$, alrededor de la frecuencia central para el cual los resultados nos proporcionan resultados confiables. En este caso se determinó la confiabilidad de los resultados partiendo del hecho que un pulso después de propagarse por una lente delgada que no presenta aberración esférica ($A=0$), ni cromática por lo cual el efecto de PTD es igual a cero, y donde la dispersión de la velocidad de grupo es nula ($GVD=0$), no sufrirá un ensanchamiento temporal ni espacial. Es decir, que un pulso que incide sobre la lente con una duración temporal de T_{int} segundos, después de propagarse por esta lente, debe tener la misma duración temporal, tal que $\langle \tau_p \rangle$ debe ser igual a 1. Así hemos calculado los valores de $\Delta\omega$, para cada una de las duraciones de pulso

que estudiaremos en los siguientes capítulos. Encontrando que, para $Nv = Nt = 400$, $Nr = 64$, el rango usado para los pulsos con una longitud de onda de la portadora igual a $\lambda = 810\text{nm}$, son:

Nv=Nt=400, Nr=64, 96 nodos (G-L)		
Duración temporal T_{int} (fs)	$\Delta\omega(1/s)$	$\Delta\lambda(\text{nm})$
4.5	$\pm 1,2 \times 10^{15}$	835
6	$\pm 1,1 \times 10^{15}$	765
10	$\pm 0,8 \times 10^{15}$	556
15	$\pm 0,5 \times 10^{15}$	348
20	$\pm 0,4 \times 10^{15}$	278
30	$\pm 0,3 \times 10^{15}$	208
200	$\pm 0,2 \times 10^{14}$	13

Los valores del ancho espacial se ha obtenido a partir de la relación:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda_0^2 \Delta\omega}{c \ 2\pi} \quad (2.6)$$

considerando $\lambda_0=810\text{nm}$.

2.3. Análisis del la lente simple de BK7, f=30mm

Una vez que se han determinado los valores de los parámetros involucrados en el estudio del campo del pulso que ha sido enfocado por una lente, a continuación se analiza el campo de un pulso de 10fs, cuya longitud de onda de la onda portadora es $\lambda = 810\text{nm}$. La lente tiene un diámetro de 12mm y una distancia focal de 30mm, el material del que esta hecho la lente es del vidrio BK7, que es un vidrio de baja dispersión. Se analiza como la aberración esférica y la aberración cromática modifica al pulso cuando éste se encuentra en la posición del foco paraxial de la lente.

Se han analizado cuatro casos, en todos ellos se ha despreciado el efecto de GVD a todos los ordenes, i.e. $GVD=0$. En el primer caso se supone que no hay aberración cromática ni esférica, indicado por $PTD=0$, $A=0$. En el segundo se ha considerado sólo la aberración esférica de la lente, indicado por $A=1$ $PTD=0$, en el tercer caso se ha considerado sólo la aberración cromática, i.e., $PTD=1$ y $A=0$, finalmente el caso, donde la lente presenta aberración cromática y esférica, i.e., $PTD=1$, $A=1$.

La figura 2.10(a) muestra el pulso que se ha propagado por la lente con las mismas características del pulso de entrada, por lo que tiene una duración de $T_{int} = 10\text{fs}$ y esta limitado por difracción. En la figura 2.10(b) observamos un ensanchamiento del pulso en espacio debido a la aberración esférica de la lente. En la figura 2.10(c) se observa un ensanchamiento en la coordenada temporal, provocado por el efecto de PTD. Finalmente, el efecto de PTD y aberración esférica parten al pulso en dos partes como se aprecia en la figura 2.10(d).

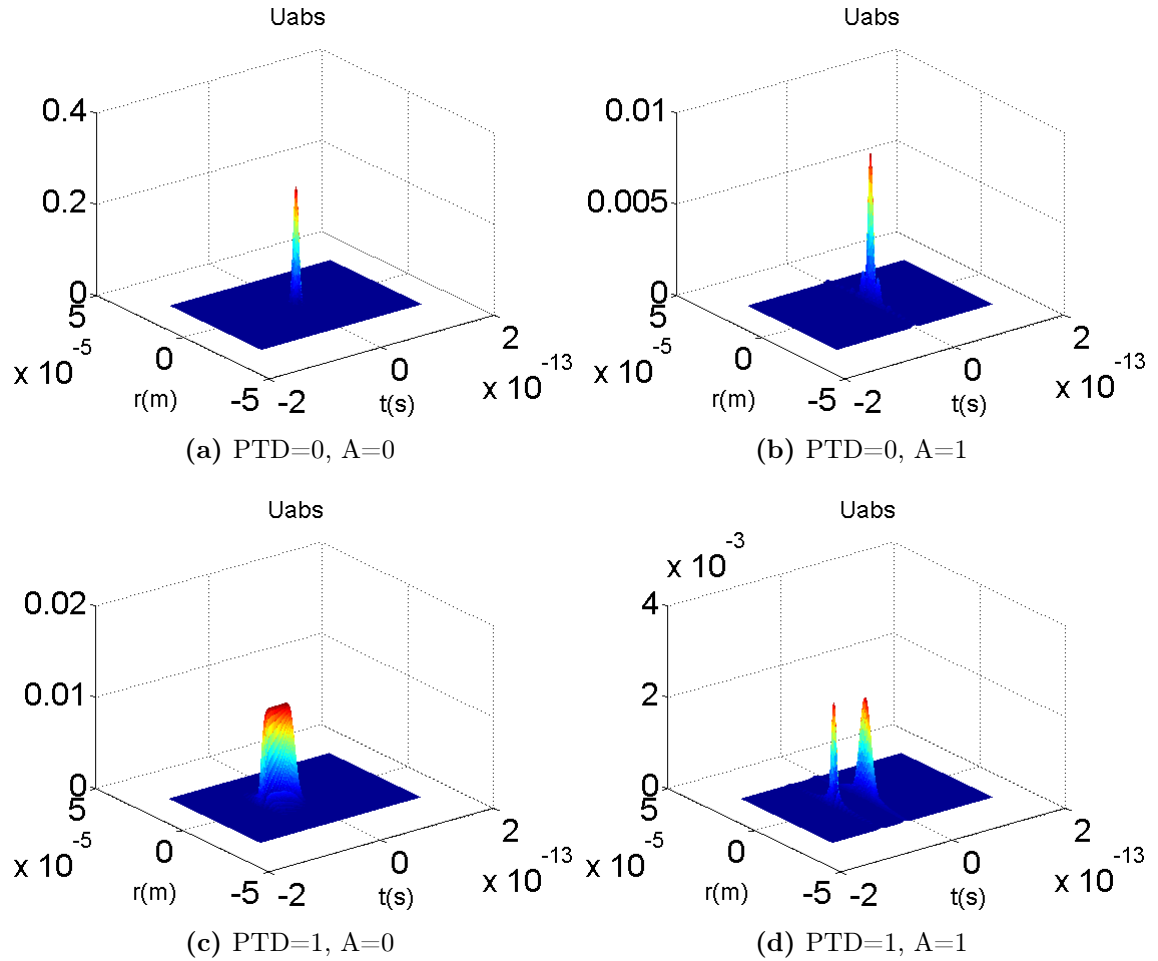


Figura 2.10: Se muestra la distribución de la intensidad de un pulso enfocado por una lente simple de BK7 de distancia focal 30mm y diámetro igual a 12mm, para diferentes condiciones de PTD y aberración esférica (A). En todos los casos GVD=0 a todos los ordenes.

En la siguiente tabla, se enlistan los valores obtenidos de $\langle \tau_p \rangle$ y $\langle \tau_v \rangle$ para una lente de BK7, para los casos que se muestran en la figura (2.10). Los valores de $\langle \tau_v \rangle$ se normalizaron respecto al caso de PTD=0, A=0, en este caso tenemos una imagen limitada por difracción, para estas condiciones el ancho espacial tiene el valor de $\langle \tau_v \rangle_0 = 3,3183 \times 10^{-6}$.

De los resultados expuestos en la figura (2.11) podemos determinar que el efecto producido por la diferencia en el tiempo de propagación reduce la calidad de la señal del pulso, $(1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle))$, en mayor cantidad que los efectos de aberración esférica. Por lo que, si se desea aumentar la calidad de la señal, se debe corregir en mayor medida la aberración cromática del sistema óptico.

Los resultados expuestos son en la posición del foco paraxial de la lente, $z = z_f$. Después que el pulso se ha enfocado por la lente, debido a la aberración esférica (A=1),

BK7, z_{fo} , 10fs, $a=6\text{mm}$, $\lambda_0 = 810\text{nm}$				
PTD	A	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle$	$1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$
0	0	1	1	1
0	1	1	5.8556	0.1707
1	0	5.0324	2.9783	0.0667
1	1	6.4471	6.0757	0.0255

BK7, $f=30\text{mm}$, $a=6\text{mm}$, $t=10\text{fs}$, Segundo orden (Analítica)
Lente Delgada

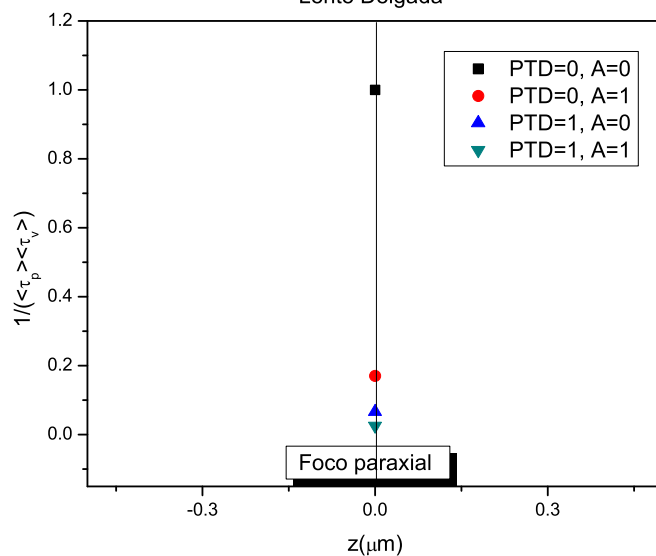


Figura 2.11

la calidad de la señal disminuye un 83 %, debido a la aberración cromática (PTD=1) un 93 %, y hasta un 97 % al considerar ambas.

Estudio de una lente simple de BK7

Ya se determinó la expresión del campo difractado de un pulso que ha sido enfocado por una lente y el método de integración más eficaz para su evaluación, así como los parámetros en el ancho de frecuencias y el número de iteraciones necesarias para obtener los mismos resultados que los que se obtienen con la integración analítica en las frecuencias. En este capítulo estudiaremos la difracción de un pulso de femtosegundos al ser enfocado por una lente simple de BK7. En la primer sección, realizaremos una comparación de los resultados obtenidos de los segundos momentos del campo en espacio y tiempo, con dos métodos de integración, el primero a partir de la solución analítica de la integral en las frecuencias, y posteriormente a partir del método de cuadraturas de Gauss-Legendre para resolver la misma integral.

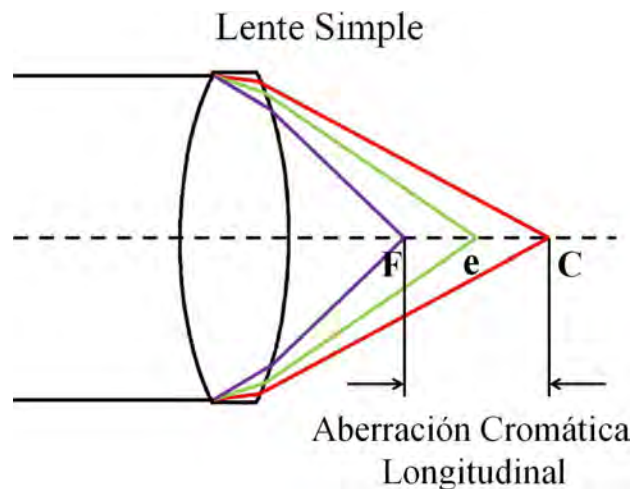


Figura 3.1: Aberración cromática longitudinal de una lente simple.

En la figura (3.1), se muestra una lente simple, enfocando luz blanca. Para una lente

simple, la luz de diferentes longitudes de onda, se enfoca en posiciones diferentes sobre el eje óptico. La distancia entre los puntos focales correspondientes a las longitudes de onda extremas en un intervalo espectral, se conoce como la aberración cromática longitudinal. La aberración cromática es proporcional al efecto de PTD, por esta razón para lentes simples, este efecto es el que provoca una disminución mayor de la calidad de la señal.

En base al artículo de Bor "Distortion of a 6 fs Pulse in the Focus of a BK7 Lens", [48] se estudian pulsos que han sido enfocados por varias lentes simples de BK7, considerando únicamente el efecto de la aberración cromática (PTD). La distancia focal de las lentes es de $f_0 = 30\text{mm}$.

En ese trabajo, [48], se estudian pulsos con una duración de 6fs a la mitad del perfil de intensidad, con este criterio la duración del pulso esta determinada por T_{FWHM} que mencionamos en el capítulo 1. Siendo la duración del pulso a la mitad ($1/2$), del perfil de intensidad igual a 6fs, el ancho en el perfil de intensidad a $1/e$, es de $T_{int} = 7,2\text{fs}$, dado que estas duraciones estan relacionadas por la siguiente expresión:

$$T_{int} = T_{FWHM} / \sqrt{\ln 2} \quad (3.1)$$

Este resultado lo podemos ver de manera grafica en la figura (3.2)

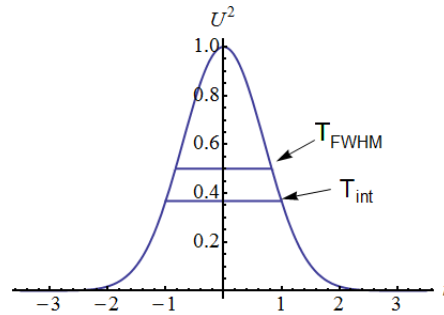


Figura 3.2: Duración temporal de un pulso medido en el perfil de intensidad a la mitad del perfil, a esta duración se le indica como T_{FWHM} , y a $1/e$ que corresponde a T_{int} .

La longitud de onda de la onda portadora del pulso, que se indica en el trabajo de Bor es $\lambda_0 = 620\text{nm}$. El estudio se presenta para lentes de diferentes radios $a=0.5\text{mm}$, $a=1\text{mm}$, $a=2\text{mm}$, $a=3.5\text{mm}$ y $a=5\text{mm}$. El análisis se torna interesante pues al tratar de concentrar en espacio y tiempo la energía de un pulso por medio de las diferentes lentes, se tiene un juego entre las propiedades de difracción obtenidas de la transformada de Fourier, donde se sabe que mientras más pequeña sea una abertura (a), por la que la luz pasa, el patrón de difracción resultante sobre una pantalla es cada vez más grande ($\propto 1/a$), obteniéndose una intensidad menor. Sin embargo, mientras más grande sea el radio de la lente, la diferencia en el tiempo de propagación (PTD), será mayor ($\propto a^2$) provocando una disminución en la intensidad. Debido a estos dos efectos, no es trivial encontrar el radio de la lente que dará la señal máxima. En este capítulo estudiaremos la calidad de la señal en la posición del foco paraxial, para determinar el radio óptimo.

En cada una de las secciones siguientes, se pueden ver los perfiles de intensidad (el módulo al cuadrado del campo difractado) para los pulsos al ser enfocados por las diferentes lentes. En orden ascendente se muestran los resultados para: $a=0.5\text{mm}$, $a=1\text{mm}$, $a=2\text{mm}$, $a=3.5\text{mm}$ y $a=5\text{mm}$. Al igual que en el artículo de Bor, se muestra el perfil de intensidad en tres diferentes posiciones sobre el eje óptico, en la primera columna los resultados obtenidos están en la posición del foco paraxial de la lente, indicado por $z_0 = f_0$, las imágenes de la segunda columna corresponden al perfil de intensidad del pulso a 150 micras hacia la lente, medidas a partir de la posición del foco paraxial y la tercera columna corresponde a la misma distribución a 300 micras hacia la lente. El diámetro de la lente es $d = 2a$.

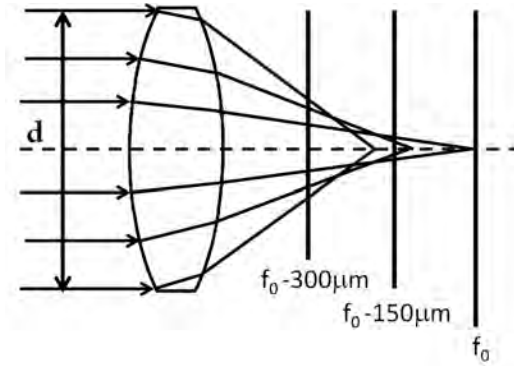


Figura 3.3: La figura muestra esquemáticamente las posiciones donde se estudia el campo.

3.1. Análisis a segundo orden en la expansión del número de onda, con base en la solución analítica en la integral de las frecuencias

En esta sección se presentan los perfiles de intensidad para los pulsos enfocados por la lente de BK7, obtenidos a partir de la expansión del número de onda respecto a la frecuencia central hasta el segundo orden. La expresión del campo difractado, se ha obtenido de la solución analítica de la integral en las frecuencias, mientras que el campo difractado en espacio se ha analizado con ayuda del método de rectángulos.

Los resultados se han obtenido considerando que el pulso que tiene una duración de 7.2fs, ha sido afectado únicamente por el efecto de PTD ($PTD=1$), para comparar con los perfiles de intensidad mostrados en el trabajo de Bor, por lo que se han despreciado los efectos producidos por la aberración esférica ($A=0$) y el efecto de la dispersión de la velocidad de grupo a todos los órdenes ($GVD=0$). En las gráficas del perfil de intensidad, se puede leer U_{abs} , esto indica el módulo del campo al cuadrado $|U|^2$.

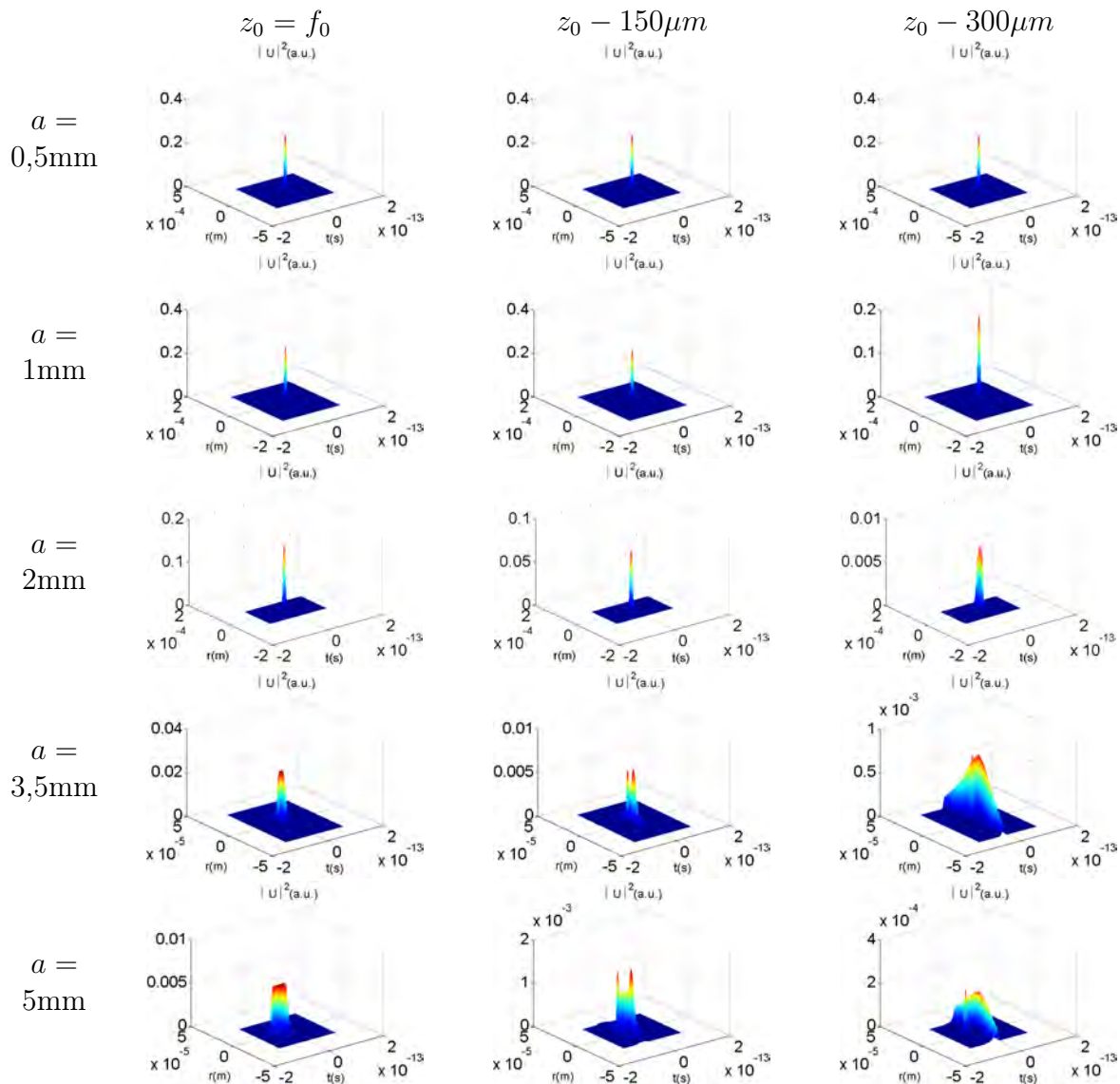


Figura 3.4: Se muestra el perfil de intensidad de los pulsos en la región focal de una lente simple de BK7. La primera columna corresponde a la posición focal, la segunda columna en la posición de $150\mu\text{m}$ hacia la lente, medida a partir del foco paraxial y la última a $300\mu\text{m}$ hacia la lente. En cada caso $A=0$, $GVD=0$ y $PTD=1$. Se ha considerado la **expansión del número de onda hasta segundo orden**, el resultado ha sido obtenido con ayuda de la **solución analítica en frecuencias**, $T_{int}=7.2\text{fs}$, $\lambda_0=620\text{nm}$. El valor de a indica el radio de la lente.

Para cada radio de la lente y para cada posición sobre el eje óptico, hemos verificado que los perfiles mostrados son análogos a los mostrados en el trabajo de Bor [48].

3.2. Análisis en base al método de integración de Gauss-Legendre

El perfil de intensidad de los pulsos mostrados en esta sección, corresponden a los mismos casos descritos en la sección anterior, pero ahora los resultados se han obtenido usando el método de Gauss-Legendre para resolver la integral en las frecuencias.

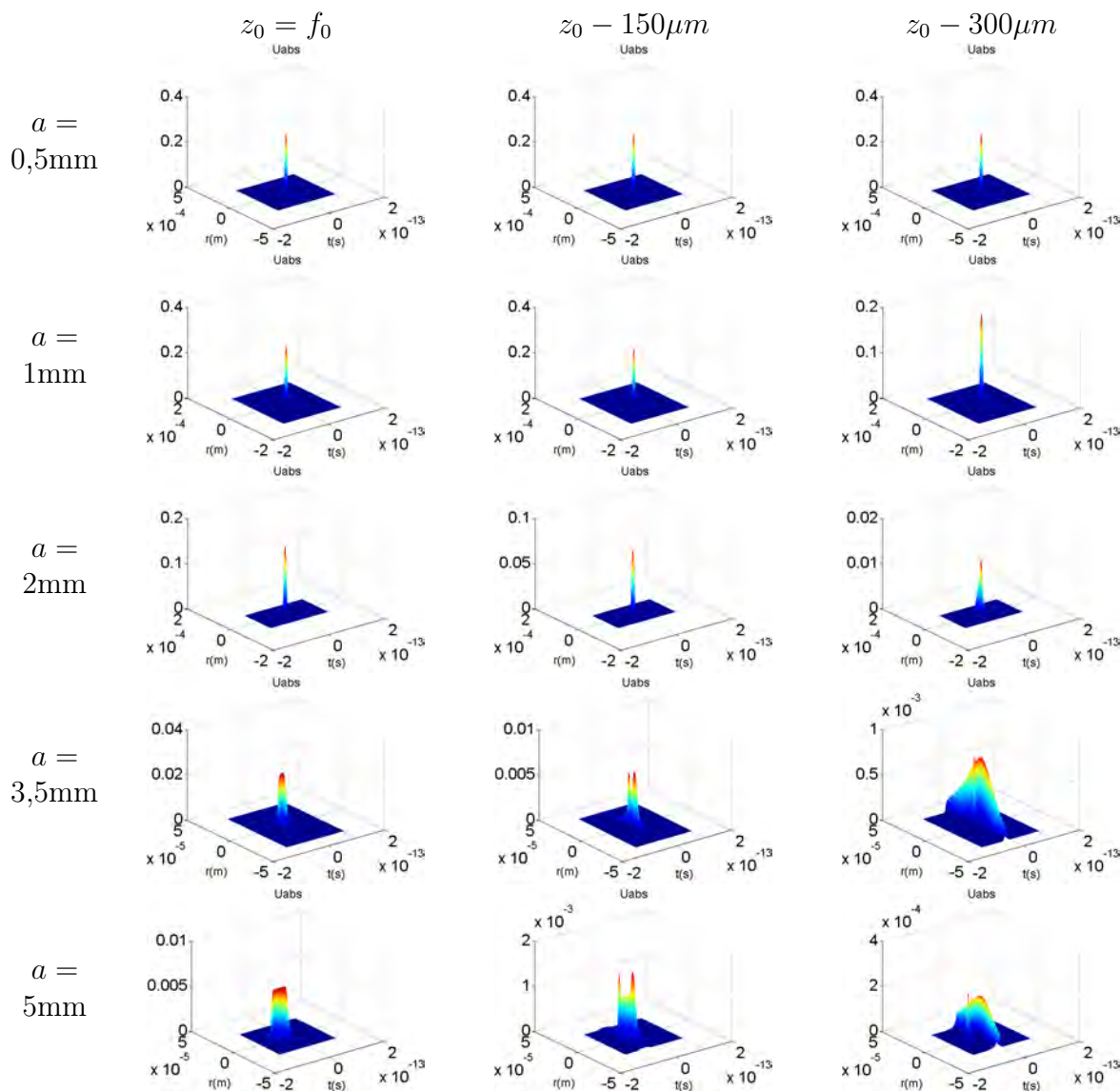


Figura 3.5: Perfil de intensidad de los pulsos en la región focal de una lente simple de BK7. La primer columna corresponde a la posición focal, la segunda columna a $150\mu m$ hacia la lente y la última a $300\mu m$ hacia la lente. Para estos casos $A=0$, $GVD=0$ y $PTD=1$. Se ha considerado la expansión del número de onda hasta segundo orden, el resultado en las frecuencias ha sido obtenido con ayuda del método de Gauss-Legendre.

En el mismo orden en el que se han presentado las distribuciones de intensidad, a continuación se enlistan los valores del ancho espacial $\langle \tau_v \rangle'$ y temporal $\langle \tau_p \rangle$. Como hemos indicado en el capítulo 1, cada uno de los segundos momentos se puede normalizar, el segundo momento en tiempo, se normaliza al dividir entre el valor del tiempo del pulso inicial, en este caso 7.2fs, por lo que el valor de $\langle \tau_p \rangle$ es una cantidad sin unidades. En el caso del segundo momento en espacio, solo se ha dividido por el factor 1×10^{-5} por sencillez. De manera formal, se debería dividir entre el segundo momento en espacio resultante de una imagen limitada por difracción ($\langle \tau_v \rangle_0$), correspondiente a cada lente, esto es, cada valor de $\langle \tau_v \rangle'$ entre el ancho obtenido del segundo momento para cada radio de la lente. Dado que la intensidad en el punto focal esta dada por $I_f(t) = |U_f(t)|^2$, la condición para que la energía sea la misma, independiente del diámetro de la lente es que la amplitud del campo $U_f(t)$, determinado por el valor de A_0 en la ecuación (1.135) del capítulo 1, sea proporcional a $A_0 \sim 1/a$. Si sustituimos el valor de $A_0 \sim 1/a$ en la expresión del segundo momento en espacio, $\langle \tau_v \rangle'$, la información $\sim 1/a$ se pierde, ya que aparece en el numerador y denominador, de tal manera que la calidad de la señal siempre es máxima para la lente con el radio de 0.5mm. Como lo que nos interesa es conocer el radio de la lente que dará la señal máxima, hemos tomado el valor de $\langle \tau_v \rangle'$, como indicamos.

BK7 , PTD=1, A=0, GVD=0, (Analítica)				BK7 , PTD=1, A=0, GVD=0, (G-L)			
$d(\text{mm})$	$z(\mu\text{m})$	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle'$	$d(\text{mm})$	$z(\mu\text{m})$	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle'$
1	$z_0 = f_0$	1.0023	3.0217	1	$z_0 = f_0$	1.0023	3.0217
	z_0-150	1.0018	3.0308		z_0-150	1.0018	3.0308
	z_0-300	1.0013	3.0601		z_0-300	1.0014	3.0601
2	$z_0 = f_0$	1.0366	1.5337	2	$z_0 = f_0$	1.0366	1.5336
	z_0-150	1.0287	1.6061		z_0-150	1.0287	1.6061
	z_0-300	1.0217	1.8428		z_0-300	1.0217	1.8428
4	$z_0 = f_0$	1.4809	0.9277	4	$z_0 = f_0$	1.4802	0.9274
	z_0-150	1.3903	1.4280		z_0-150	1.3897	1.4280
	z_0-300	1.3042	3.1264		z_0-300	1.3038	3.1268
7	$z_0 = f_0$	3.4864	0.9695	7	$z_0 = f_0$	3.4834	0.9688
	z_0-150	3.0976	2.1707		z_0-150	3.0950	2.1714
	z_0-300	2.6386	4.8402		z_0-300	2.6364	4.8409
10	$z_0 = f_0$	6.8470	1.1155	10	$z_0 = f_0$	6.8474	1.1154
	z_0-150	5.9711	2.3192		z_0-150	5.9711	2.3193
	z_0-300	3.7622	3.7937		z_0-300	3.7622	3.7937

Figura 3.6: Valores de $\langle \tau_p \rangle$ y $\langle \tau_v \rangle'$, los valores de $\langle \tau_v \rangle'$ se han dividido por el factor 1×10^{-5} . En la primer tabla se estudia el campo cuando se ha realizado la expansión a segundo orden para el número de onda, con ayuda de la integral analítica y considerando sólo el efecto de PTD (i.e. A=0, GVD=0, PTD=1). En la segunda tabla se estudia la expansión hasta segundo orden, con ayuda de la integral de Gauss-Legendre y considerando sólo el efecto de PTD. $T_{int} = 7.2\text{fs}$, $\lambda_0 = 620\text{nm}$.

Por los valores mostrados en las tablas (3.6), se comprueba que el método de integración de Gauss-Legendre da prácticamente los mismos resultados que los obtenidos con la solución analítica en la integral de las frecuencias.

A continuación en (3.7), se muestran gráficamente los valores contenidos en la tabla (3.6). El valor $\langle \tau_p \rangle$, como se mencionó en el capítulo 1, se ha obtenido al dividir el segundo momento $\langle \tau_p \rangle'$ entre la duración del pulso inicial, $T_{int}=7.2\text{fs}$. El valor de $\langle \tau_v \rangle'$ expuesto no tiene ninguna normalización.

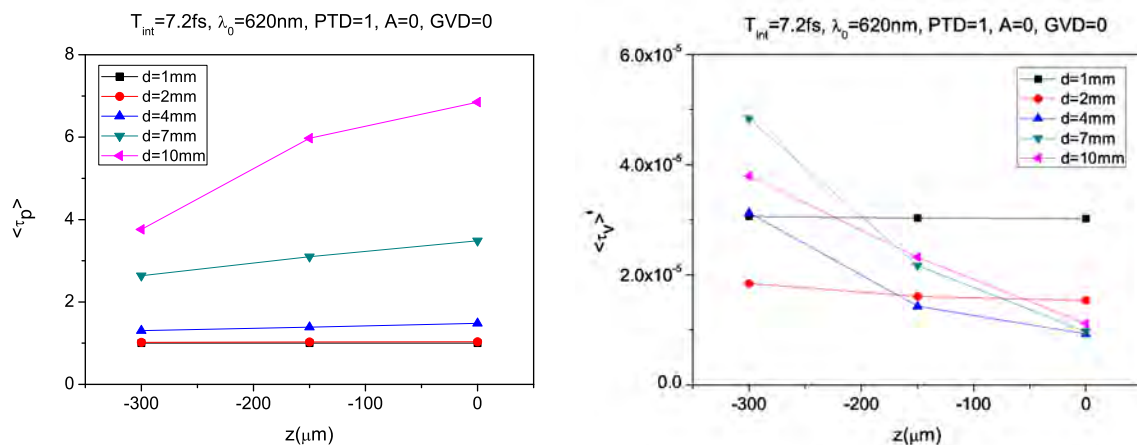


Figura 3.7: Segundos momentos $\langle \tau_p \rangle$ y $\langle \tau_v \rangle'$ a segundo orden en la expansión del número de onda con (PTD=1, A=0, GVD=0). $T_{int} = 7.2\text{fs}$, $\lambda_0 = 620\text{nm}$.

En las gráficas (3.8), se muestra la calidad de la señal obtenida con la solución analítica en las frecuencias y con el método de Gauss-Legendre.

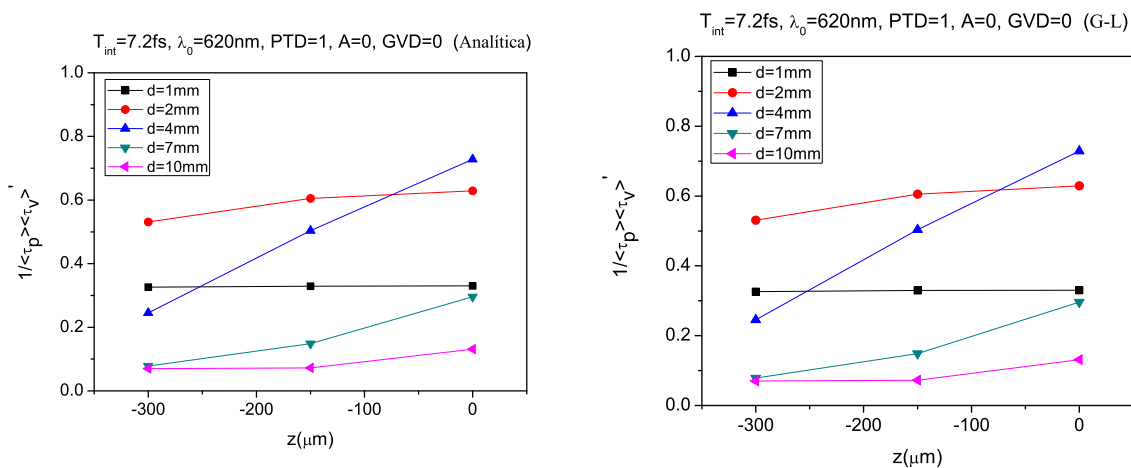


Figura 3.8: Las gráficas muestran la calidad de la señal obtenida para la aproximación de segundo orden en el número de onda (analítica y G-L). PTD=1, A=0, GVD=0. $\lambda_0 = 620\text{nm}$ $T_{int} = 7,2\text{fs}$. Lente de BK7, $f=30\text{mm}$.

Si consideramos el efecto de PTD de la óptica geométrica indicado en el capítulo 1, cuya ecuación esta determinada por: (1.124):

$$\Delta T'(r_b) = \frac{r_b^2}{2c} \frac{\lambda}{f(n-1)} \frac{dn}{d\lambda} \quad (3.2)$$

siendo $a = r_b$, podemos encontrar el valor de la diferencia del tiempo de propagación. De los valores de los coeficientes de Sellmeier para BK7 que se muestran en el apéndice C, obtenemos que el índice de refracción para la longitud de onda de $\lambda_0 = 620\text{nm}$, es $n=1.5155$, la derivada del índice de refracción respecto a la longitud de onda evaluado en 620nm es igual a $dn/d\lambda = -0,036\mu\text{m}^{-1}$. Con estos valores, hemos encontrado el valor de PTD para cada una de las lentes indicadas. El valor obtenido, se ha comparado con el valor de $\langle \tau_p \rangle'$ de la óptica física, que proporciona la duración exacta del pulso solo cuando los pulsos tienen una envolvente gaussiana, pero cuando la forma del pulso es diferente a la gaussiana, $\langle \tau_p \rangle'$, da una estimación de la duración del pulso. Estos valores se muestran en la siguiente tabla (3.9):

BK7, $\lambda_0 = 620\text{nm}$, $T_{int} = 7.2\text{fs}$, $f_0 = 30\text{mm}$, $z_0 = f_0$			
$a(\text{mm})$	N.A.	$\Delta T'(r_b)$ (fs)	$\langle \tau_p \rangle'$ (fs)
0.5	0.01	0.6	7.2
1	0.03	2.4	7.4
2	0.06	9.6	10.6
3.5	0.11	29.5	25.1
5	0.16	60.3	49.2

Figura 3.9: Comparación de los valores de PTD de la óptica geométrica ($\Delta T'(r_b)$) y la óptica física ($\langle \tau_p \rangle'$) en la posición del foco paraxial. Los resultados muestran el valor del segundo momento sin normalización. Los datos de óptica física se han obtenido al considerar únicamente el efecto de PTD, i.e. $A=0$, $GVD=0$, $PTD=1$.

Cuando el valor de $\Delta T'(a)$ es menor a la duración temporal del pulso, la óptica geométrica nos dice que el ensanchamiento en tiempo debido a la diferencia del tiempo de propagación es despreciable [85]. Este resultado se puede ver en los valores de $\langle \tau_p \rangle'$ correspondientes, para las lentes cuyos radios son 0.5mm y 1mm . Para la lente de radio 2mm , la óptica geométrica predice que el pulso tiene una duración de 9.6fs , mientras que la óptica física de 10.6fs , la diferencia entre estos valores es de 1fs , por lo que la óptica geométrica es una buena predicción. Para la lente de radio 3.5mm , a continuación se muestra el perfil de intensidad contra el tiempo. A partir del valor máximo alcanzado, se ha tomado la medida directamente de la gráfica, del ancho del pulso a $1/e$ con lo que se ha determinado que la duración temporal es de 28.7fs , como se muestra en la figura. Se observa que el pulso no tiene una envolvente gaussiana, y que el valor de 28.7fs es intermedio al predicho por la óptica geométrica y el valor estimado de la óptica física.

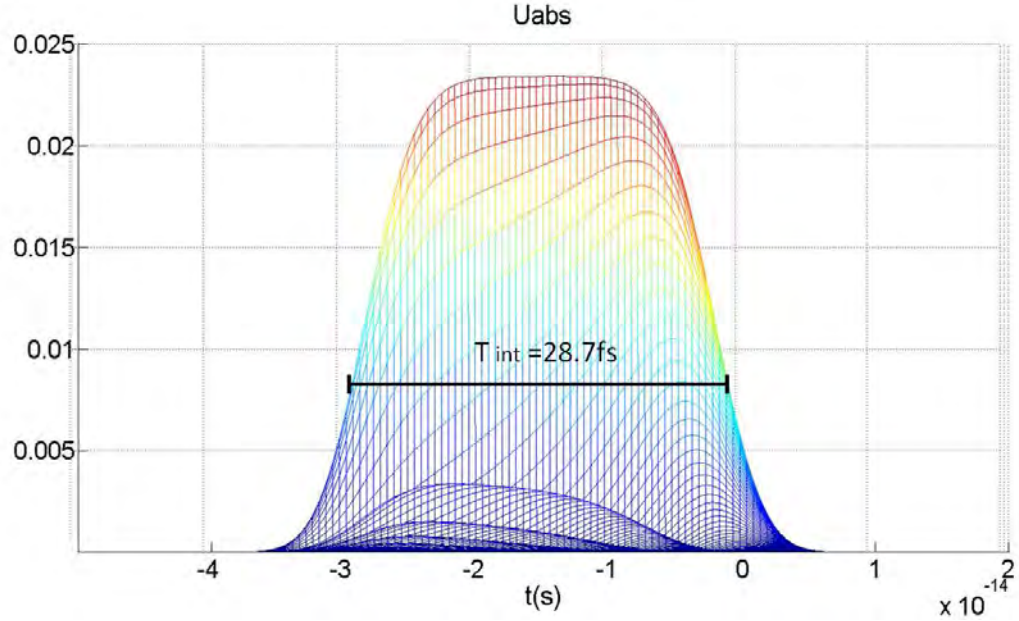


Figura 3.10: Duración temporal del pulso medido directamente de la gráfica. Para un pulso con duración inicial $T_{int} = 7.2 \text{ fs}$, que ha sido enfocado por una lente simple de BK7 de radio $a = 3.5 \text{ mm}$. El resultado se muestra en el foco paraxial de la lente. $PTD=1$, $GVD=0$ y $A=0$, $\lambda_0 = 620 \text{ nm}$.

Según el análisis de Bor [104], donde únicamente se considera el efecto de PTD, al iluminar de manera uniforme una lente de semi-diámetro a con un pulso de luz de duración τ , la intensidad máxima en la posición del foco paraxial se obtendrá, cuando el semi-diámetro cumple la relación:

$$a_{opt}^2 = f_0^2 \frac{K_s 2c\tau}{\omega_0 |f'(\omega_0)|} \quad (3.3)$$

donde a_{opt} es el radio óptimo de la lente y τ es el tiempo del pulso medido con el criterio FWHM. En caso de que el pulso incidente tenga una modulación gaussiana en frecuencias el valor de K_s tiene el valor, $K_s = 1,6816$. La duración del pulso τ en la notación indicada en el capítulo 1, esta determinado por T_{FWHM} . En nuestros calculos se ha considerado el tiempo medido a $1/e$ del perfil de intensidad $\tau = \sqrt{\ln 2} T_{int}$, por lo que el radio óptimo esta determinado por

$$a_{opt}^2 = f_0^2 \frac{2(1,6816)c\sqrt{\ln 2} T_{int}}{\omega_0 |f'(\omega_0)|} \quad (3.4)$$

Donde la derivada de la distancia focal respecto a la frecuencia, evaluado en la frecuencia de la onda portadora es

$$f'(\omega_0) = \left. \frac{df}{d\omega} \right|_{\omega_0} = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} \left(\frac{f}{n_0 - 1} \right) \left. \frac{dn}{d\lambda} \right|_{\lambda_0} \quad (3.5)$$

Considerando $f = 30 \text{ mm}$, $n_0 = 1,5155$ para $\lambda_0 = 620 \text{ nm}$, el valor de la frecuencia central

es $\omega_0 = 3,04\text{PHz}$, con estos valores la ecuación (3.5) toma el valor de $-4.29 \times 10^{-4}\text{m/PHz}$, ($1\text{PHz}=10^{15}\text{Hz}$) [104].

Con estos valores y suponiendo $T_{int} = 7.2\text{fs}$, el valor del radio óptimo es de $a \approx 2.05\text{mm}$.

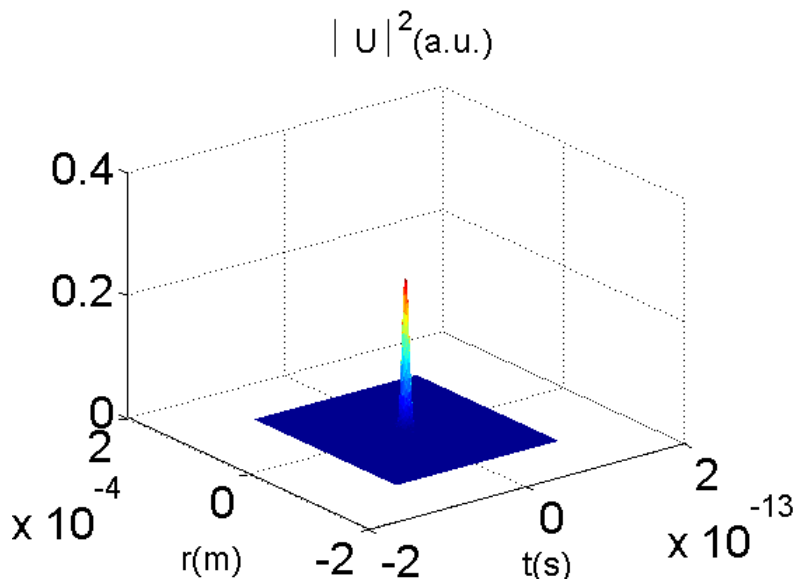


Figura 3.11: Perfil de intensidad para el pulso en el foco paraxial de la lente de BK7 con semidiámetro igual a 2.05mm. PTD=1, A=0, GVD=0. $\lambda_0 = 620\text{nm}$ $T_{int} = 7.2\text{fs}$. Lente de BK7, $f=30\text{mm}$.

Al tomar el valor $a=2.05\text{mm}$, el valor del segundo momento en espacio es $\langle \tau_v \rangle' = 9,2095 \times 10^{-6}$ y en tiempo $\langle \tau_p \rangle = 1,5163$, por lo que la calidad de la señal es igual a $S_B = 71.61 \times 10^3$. Donde el subíndice B indica la calidad de la señal para el radio óptimo predicho por Bor.

La figura (3.12-a), muestra un máximo en el radio de 1.59mm, esta cantidad difiere del diámetro óptimo indicado por la formula de Bor ($a = 2.05\text{mm}$), por 0.46mm. Para $a = 1.59\text{mm}$, el valor del segundo momento en espacio es $\langle \tau_v \rangle' = 1,0428 \times 10^{-5}$ y en tiempo $\langle \tau_p \rangle = 1,2147$, por lo que la calidad de la señal es igual a $S_M = 78.94 \times 10^3$. S_M indica la calidad de la señal máxima que hemos encontrado en el análisis.

El comportamiento de la calidad de la señal respecto al radio de la lente, es análogo a la curva de intensidad *versus* el radio de la lente, mostrada en la figura (3.12-b) la cual fue tomada del artículo de Bor [52].

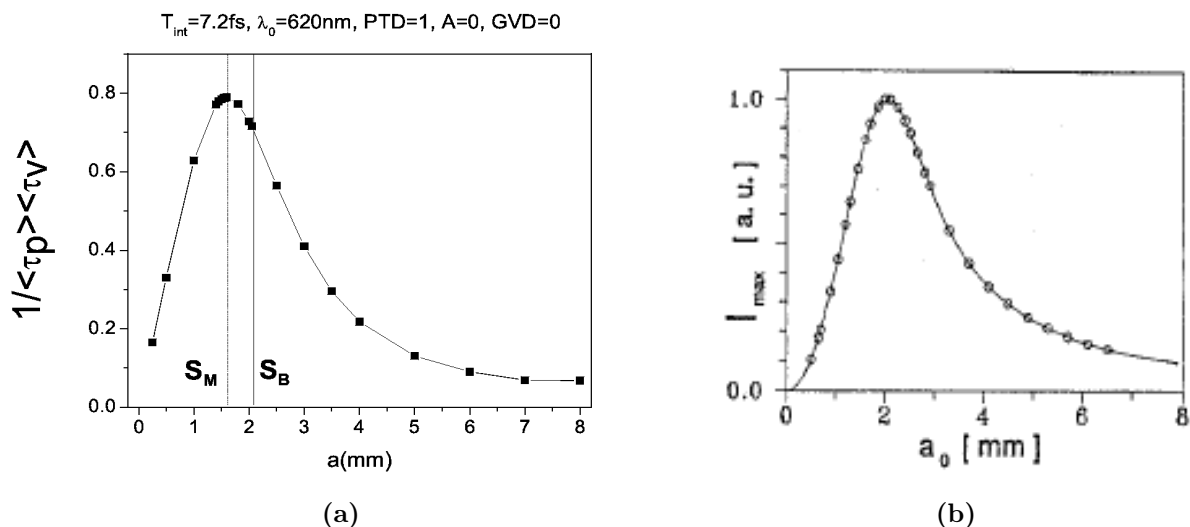


Figura 3.12: En la figura (a) se muestra la calidad de la señal para un pulso de $T_{int} = 7,2\text{fs}$, que se ha enfocado por una lente simple de BK7, con una distancia focal $f=30\text{mm}$, los datos corresponden a la posición del foco paraxial. El valor de $\langle \tau_v \rangle'$ se ha dividido por 1×10^{-5} . En la figura (b) se muestra la intensidad vs. radio de la lente, mostrada en el artículo de Bor [52]. En ambos casos se ha considerado: $PTD=1$, $GVD=0$ y $A=0$, $\lambda_0=620\text{nm}$.

Las gráficas (a) y (b) mostradas en la figura (3.12), tienen el mismo comportamiento, indicando que la calidad de la señal es una medida análoga a la intensidad, sin embargo, estas cantidades tienen unidades diferentes. Mientras que la intensidad es una medida de la energía por unidad de área por unidad de tiempo, la calidad de la señal es el inverso de la segundos momentos del campo eléctrico y no considera la energía del sistema, además no tiene unidades.

La diferencia entre los máximos se debe a que el tratamiento del estudio del campo difractado se ha abordado de manera diferente, mientras que Bor utiliza las funciones de Lommel para encontrar la expresión del campo difractado, en nuestro caso, hemos desarrollado una expansión en serie de Taylor del número de onda respecto a la frecuencia central, como se trato en el Capítulo 1. Sin embargo, podemos decir que los resultados expuestos predicen un máximo en la calidad de la señal o en la intensidad, para una lente con radio aproximadamente de 2mm.

3.3. Análisis considerando tercer orden de GVD, PTD y Aberración Esférica

El perfil de intensidad de los pulsos expuestos en la figura (3.13), es el resultado de la difracción del campo por la lente simple de BK7, al considerarse los efectos de PTD, aberración esférica y GVD de tercer orden. Los resultados se han obtenido al usar el método

de Gauss-Legendre en la integral de las frecuencias. A pesar que la aberración cromática para una lente simple es un efecto dominante sobre otras aberraciones, se observan modificaciones respecto a los perfiles de intensidad mostrados en la figura (3.4).

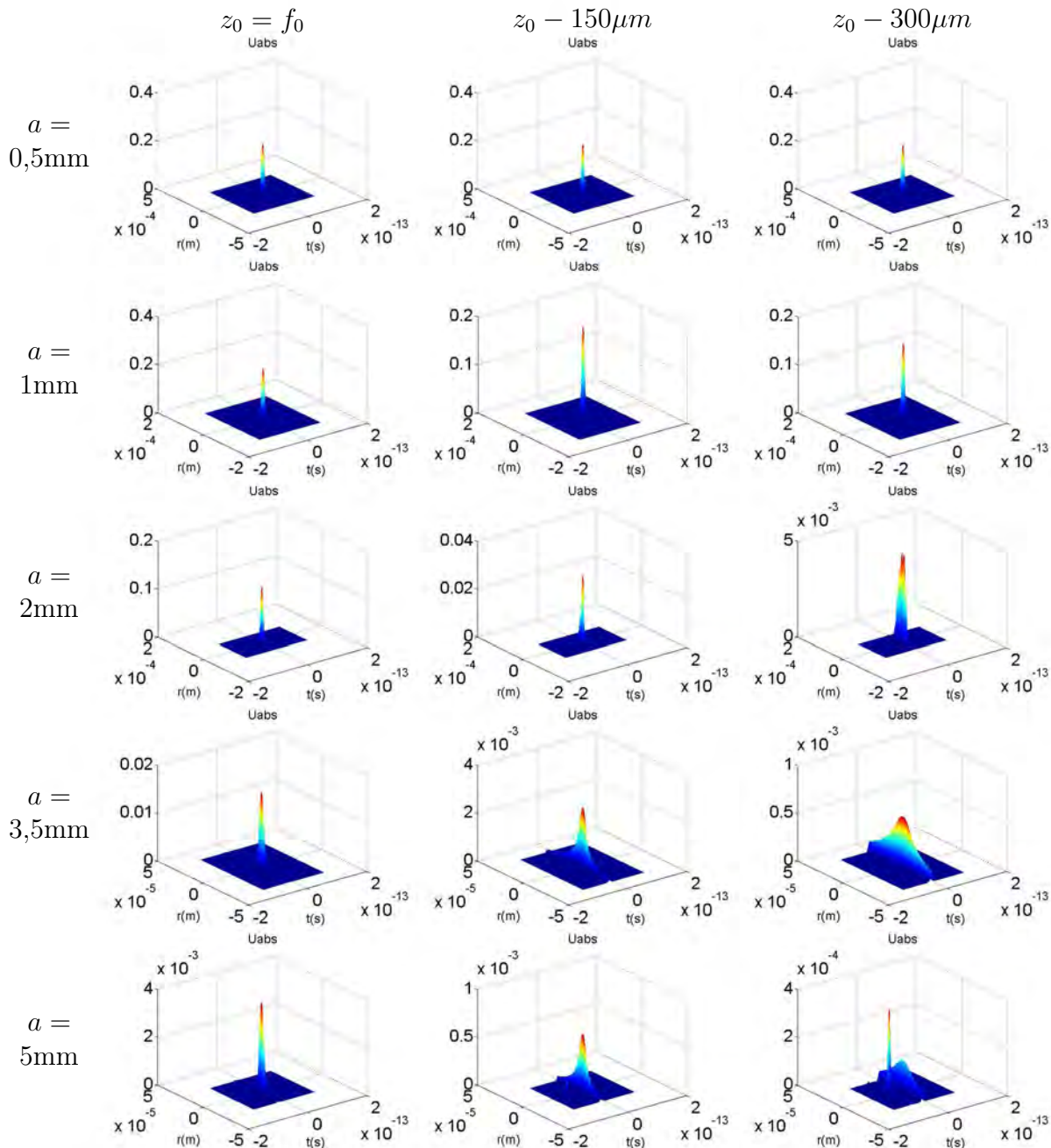


Figura 3.13: Se muestra el perfil de intensidad de los pulsos en la región focal paraxial de una lente simple de BK7. La primera columna corresponde a la posición focal, la segunda columna en la posición de $150\mu\text{m}$ hacia la lente y la última a $300\mu\text{m}$ hacia la lente. Para estos casos $A=1$, $GVD=1$ (de tercer orden) y $PTD=1$. $T_{int} = 7,2\text{fs}$, $\lambda_0=620\text{nm}$.

3.3. Análisis considerando tercer orden de GVD, PTD y Aberración Esférica

La descripción cuantitativa de la calidad de la señal, se obtiene del inverso de los segundos momentos del campo. A partir del valor de los segundos momentos se obtiene la calidad de la señal considerando el tercer orden de GVD ($GVD=1$), el efecto de PTD ($PTD=1$) y la aberración esférica ($A=1$) de la lente de BK7.

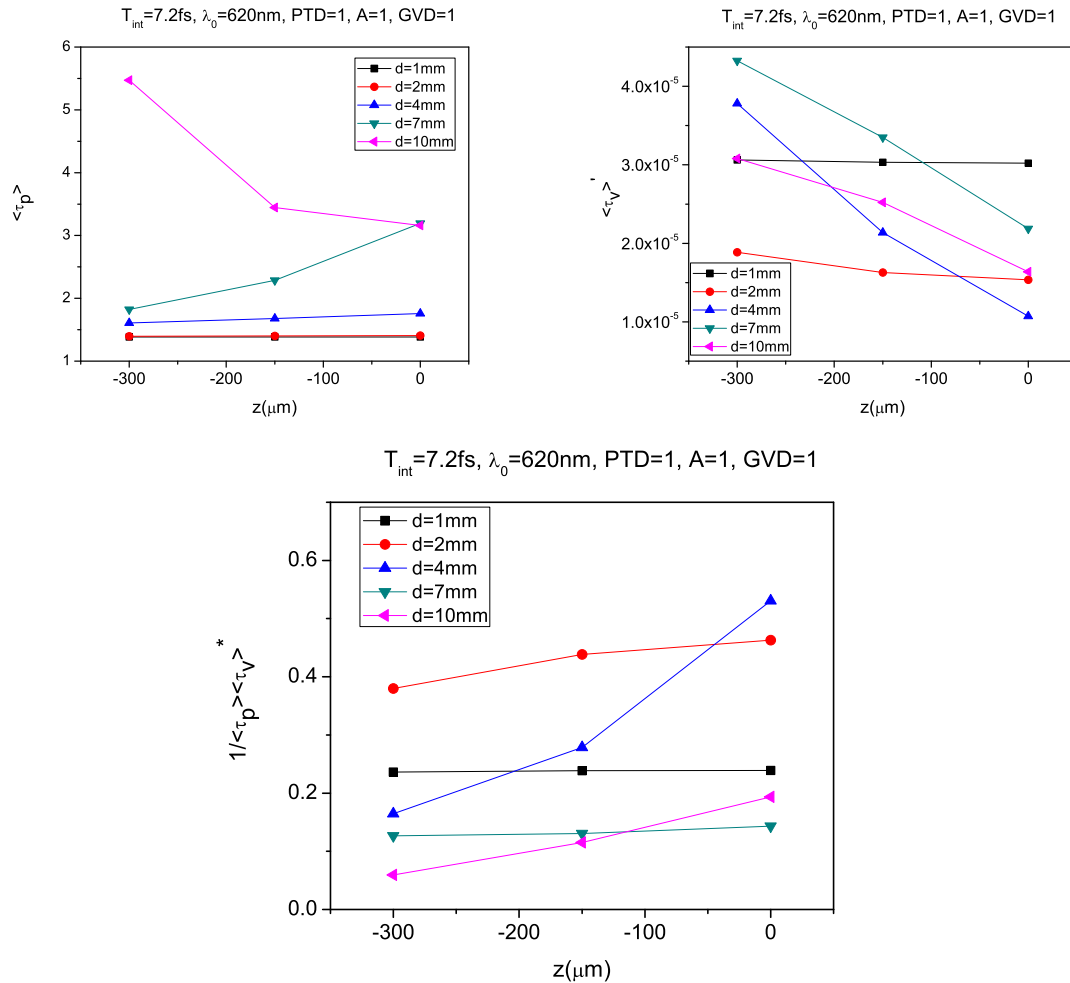


Figura 3.14: Segundos momentos en tiempo y espacio, y la calidad de la señal cuando se considera el tercer orden en la expansión del número de onda, $GVD=1$, $PTD=1$ y $A=1$. $T_{int} = 7,2fs$, $\lambda_0=620nm$, $f=30mm$.

El valor de la calidad de la señal mostrado en la gráfica (3.14), se obtuvo considerando $\langle \tau_v \rangle'$ dividida por el factor 1×10^{-5} , por sencillez en la presentación, además que lo interesante es la comparación de la calidad de la señal para los diferentes diámetros. En esta gráfica se observa que el valor máximo se encuentra para la lente de diámetro de 4mm, en la posición del foco paraxial.

Haciendo un análisis más detallado, considerando la duración del pulso $T_{int} = 7.2fs$, el efecto de GVD, PTD y aberración esférica, la calidad de la señal respecto al radio de la

lente, se muestra en la gráfica (3.15), donde se aprecia que el valor máximo se encuentra en la posición de $a = 1.59\text{mm}$, este es el valor del radio para el cual se encontro el máximo de la calidad de la señal al tomar sólo el efecto de PTD. El valor del segundo momento en espacio es $\langle \tau_v \rangle' = 1.0770 \times 10^{-5}$ y en tiempo $\langle \tau_p \rangle = 1.5382$, determinando la calidad de la señal como $S_M = 60.36 \times 10^3$. En la gráfica se aprecia la calidad de la señal para el valor del radio óptimo predicho por Bor, la diferencia entre máximos es de 0.46mm . Si ahora se consideran los efectos de GVD, PTD y aberración esférica, el valor del segundo momento en espacio, para el radio de $a = 2.05\text{mm}$ indicado por Bor como el radio óptimo, es $\langle \tau_v \rangle' = 1.0862 \times 10^{-5}$ y en tiempo $\langle \tau_p \rangle = 1.7848$, determinando la calidad de la señal como $S_B = 51.57 \times 10^3$.

Podemos concluir que aún considerando los efectos de GVD de tercer orden y la aberración esférica, la predicción hecha por Bor para el radio óptimo, da un valor en la calidad de la señal S_B , cercana al valor de S_M .

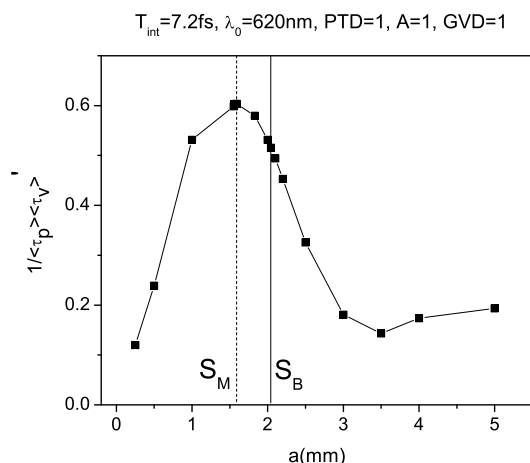


Figura 3.15: La calidad de la señal para un pulso de $T_{int} = 7,2\text{fs}$, enfocado por lentes simples de BK7 de diferentes radios, con una distancia focal $f_0 = 30\text{mm}$, $\lambda_0 = 620\text{nm}$. El valor de $\langle \tau_v \rangle'$ se ha dividido por 1×10^{-5} . Se han considerado los efectos de PTD, GVD y aberración esférica (PTD=1, GVD=1 y A=1).

3.4. Análisis para $\lambda_0 = 810\text{nm}$ y $T_{int} = 10\text{fs}$ y $T_{int} = 20\text{fs}$.

Debido a que en el laboratorio de láseres en el CCADET esta en construcción un láser de luz pulsada a 20fs , con una longitud de onda de la portadora $\lambda_0 = 810\text{nm}$, se ha realizado un estudio para las lentes de BK7 que tratamos en las secciones previas, cuando se ilumina de manera uniforme la lente, para pulsos de duración 10fs y 20fs .

En orden descendente se muestran los resultados para los diámetros $d = 1\text{mm}$, $d = 2\text{mm}$, $d = 4\text{mm}$, $d = 7\text{mm}$ y $d = 10\text{mm}$. Como se hizo en las secciones previas, la primera columna muestra el perfil de intensidad en la posición focal paraxial, la segunda a 150 micras hacia la lente y la tercera columna a 300 micras hacia la lente.

3.4.1. Análisis considerando el tercer orden de GVD y PTD, para pulsos con duración de 10fs

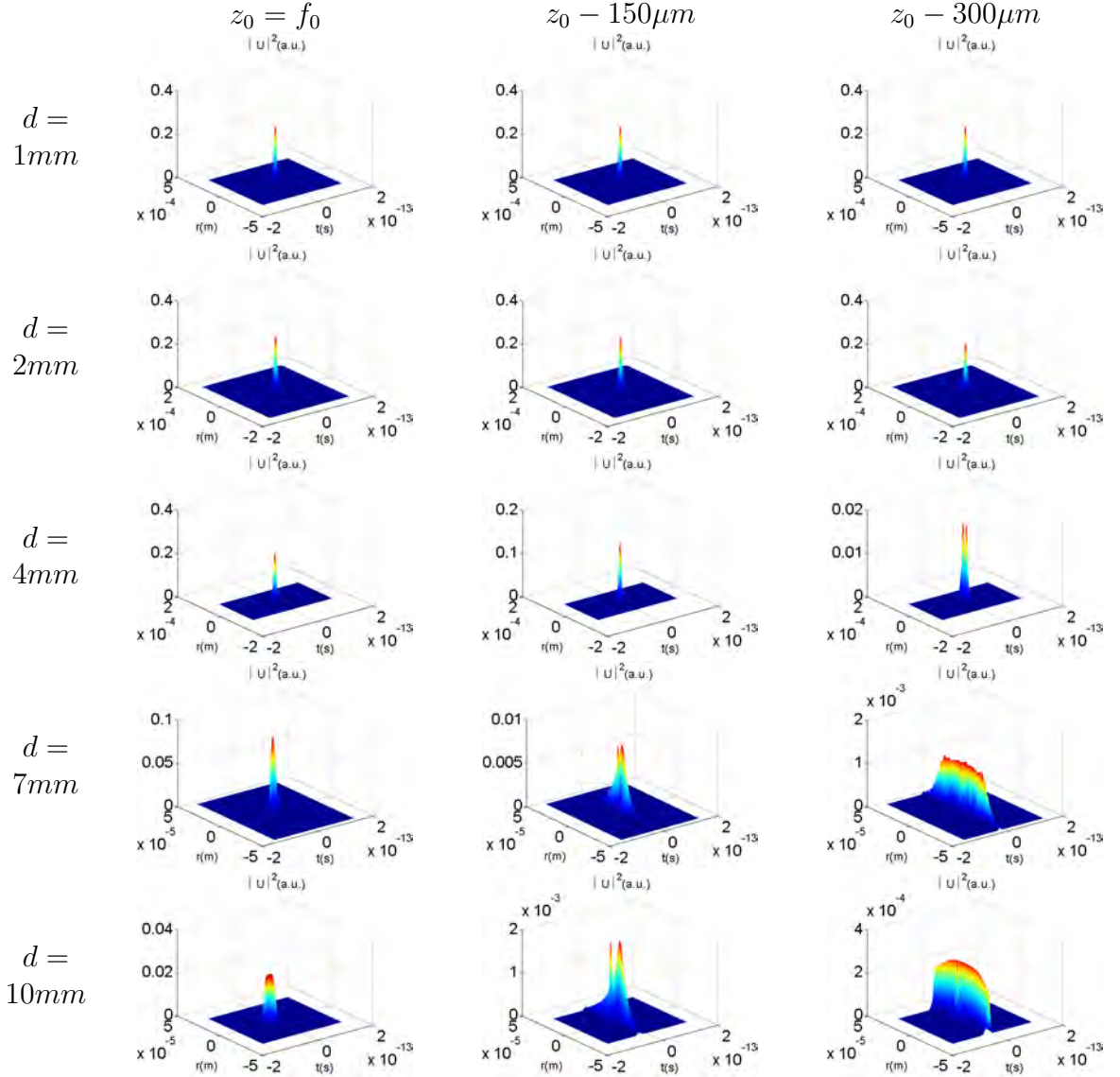


Figura 3.16: Se muestran la distribución de intensidad para pulsos enfocados por lentes simples de BK7 de diferentes diámetros, con una frecuencia de la portadora igual a $\lambda_0 = 810\text{nm}$ y duración $T_{int} = 10\text{fs}$. Se ha considerado la **expansión hasta el segundo orden en la expansión del número de onda, indicando en el programa de G-L PTD=1, A=0, GVD=0.**

En la figura (3.17), se exponen graficamente los segundos momentos en tiempo y espacio, con estos datos se determino la calidad de la señal, mostrada en la tercer gráfica.

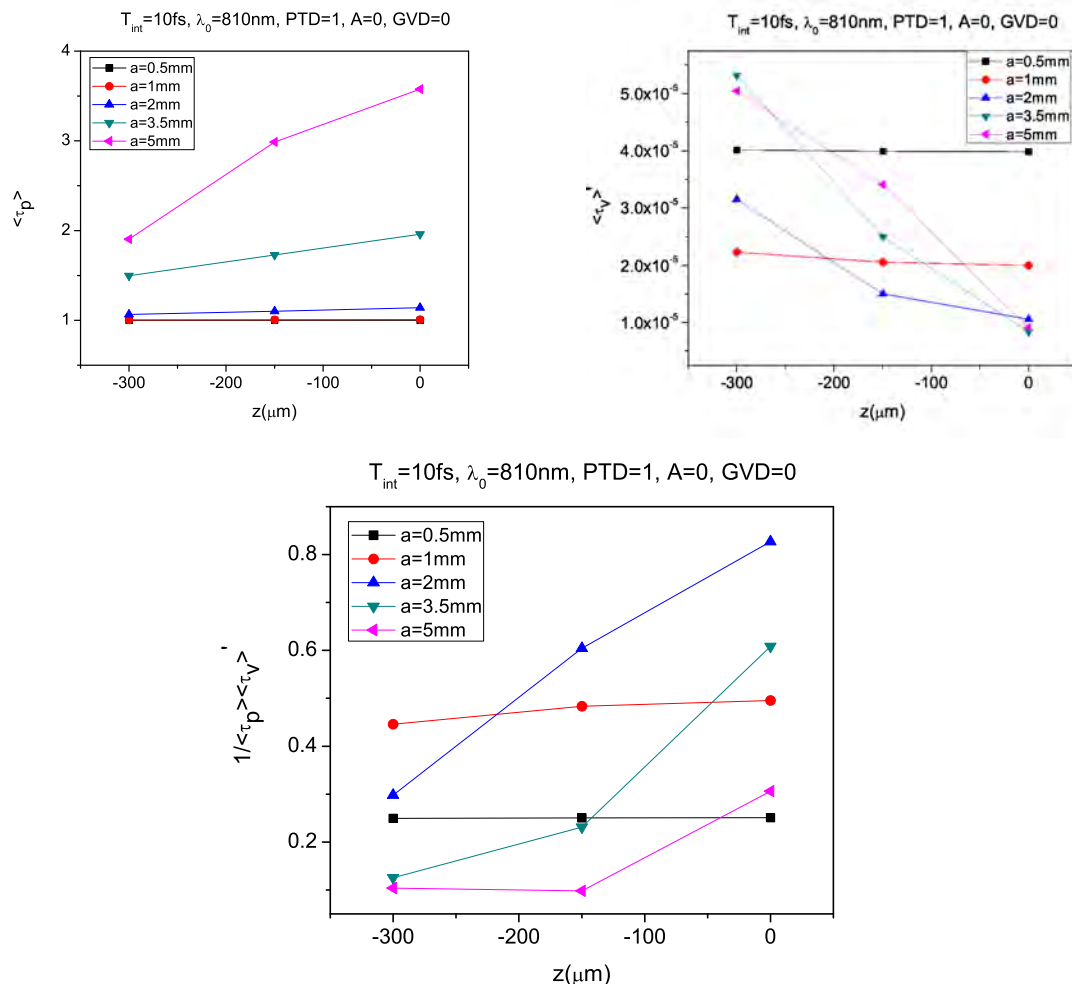


Figura 3.17: En el primer renglón se muestran los anchos temporales y espaciales, con ello se ha determinado la calidad de la señal para pulsos de 10fs. La posición indicada por 0, corresponde a la posición del foco paraxial, a partir de esta posición se ha desplazado hacia la lente $150\mu\text{m}$ y $300\mu\text{m}$. El valor de S esta escalado por el factor 1×10^{-5} .

En la figura (3.17), se muestra el valor de $\langle \tau_p \rangle$, en esta podemos apreciar que el ensanchamiento en tiempo para el pulso de 10fs en la posición del foco paraxial, es máximo para el radio de $a = 5\text{mm}$ y mínimo para la lente con radio $a = 0,5\text{mm}$, como es de esperarse por el efecto de PTD, pues depende del semidiámetro al cuadrado a^2 .

En la figura (3.17), también podemos observar de manera gráfica el valor de $\langle \tau_v \rangle'$, en la que podemos apreciar que el ensanchamiento espacial es mínimo en la posición del foco paraxial y para la lente con radio de $a = 3.5\text{mm}$. Adicionalmente en el foco paraxial, el máximo de $\langle \tau_v \rangle'$, se obtiene para la lente con radio de 0.5mm , como es de esperarse por las propiedades de la transformada de Fourier, donde el tamaño del patrón de difracción es inversamente proporcional al tamaño de la abertura [94].

A partir de la formula de Bor (3.3), el radio óptimo para $T_{int}=10\text{fs}$ y $\lambda = 810\text{nm}$, es

$a_{opt} = 2,86\text{mm}$, la calidad de la señal para este caso es de $S_B=74.20 \times 10^3$. Para determinar si este radio efectivamente da un valor de la señal mayor que en otro caso, se hizo el análisis que se observa en la gráfica (3.18), donde se tiene la calidad de la señal como función del radio de la lente, para el caso en el que sólo se considera el efecto de PTD figura (3.18-a), y para el caso en el que además se considera el efecto de PTD, aberración esférica y GVD, figura (3.18-b).

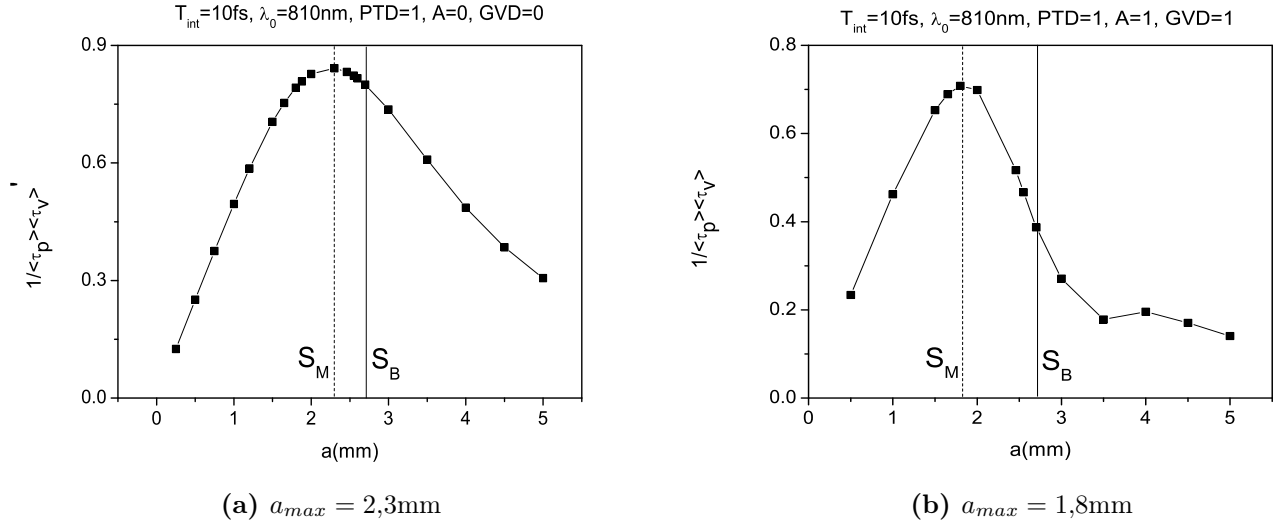


Figura 3.18: La calidad de la señal para un pulso de $T_{int} = 10\text{fs}$, que ha sido enfocado por lentes de BK7 de diferentes radios. La distancia focal de la lente es constante $f_0 = 30\text{mm}$, $\lambda_0=810\text{nm}$. Se muestra el valor del radio óptimo, indicado por Bor.

En la figura (3.18-a), se muestra el caso en el que $PTD=1$, $A=0$ y $GVD=0$ en donde el máximo de la calidad de la señal, S_M , se alcanza para el valor $a=2.3\text{mm}$. En la figura (3.18-b), se muestra el caso en el que $PTD=1$, $A=1$ y $GVD=1$ en donde el máximo de la señal, S_M , se alcanza para el valor $a=1.8\text{mm}$. El radio óptimo obtenido con la ecuación (3.4) es igual a $a_{opt}=2.86\text{mm}$, la cual fue derivada por Bor para el caso en el que $PTD=1$, $A=0$ y $GVD=0$. En las figuras (3.18-a y 3.18-b) se muestra el radio óptimo obtenido con la ecuación (3.4) con la línea vertical marcada como S_B y cuyo valor es igual a $a_{opt}=2.86\text{mm}$. La diferencia entre el radio óptimo indicado por Bor (2.86mm) y el obtenido en la figura (3.18-a) (i.e., 2.3mm) es de 0.53mm, por lo que para pulsos con duración de 10fs la formula de Bor puede ser usada para buscar la calidad de la señal máxima.

3.4.2. Análisis considerando PTD, para pulsos con duración de 20fs

Para el caso en el que $PTD=1$, $GVD=0$ y $A=0$, tomando los radios mencionados en las secciones previas y los mismos desfocamientos, se ha analizado la señal cuando los pulsos

tienen una duración de 20fs, en la figura (3.19) se muestran los perfiles de intensidad.

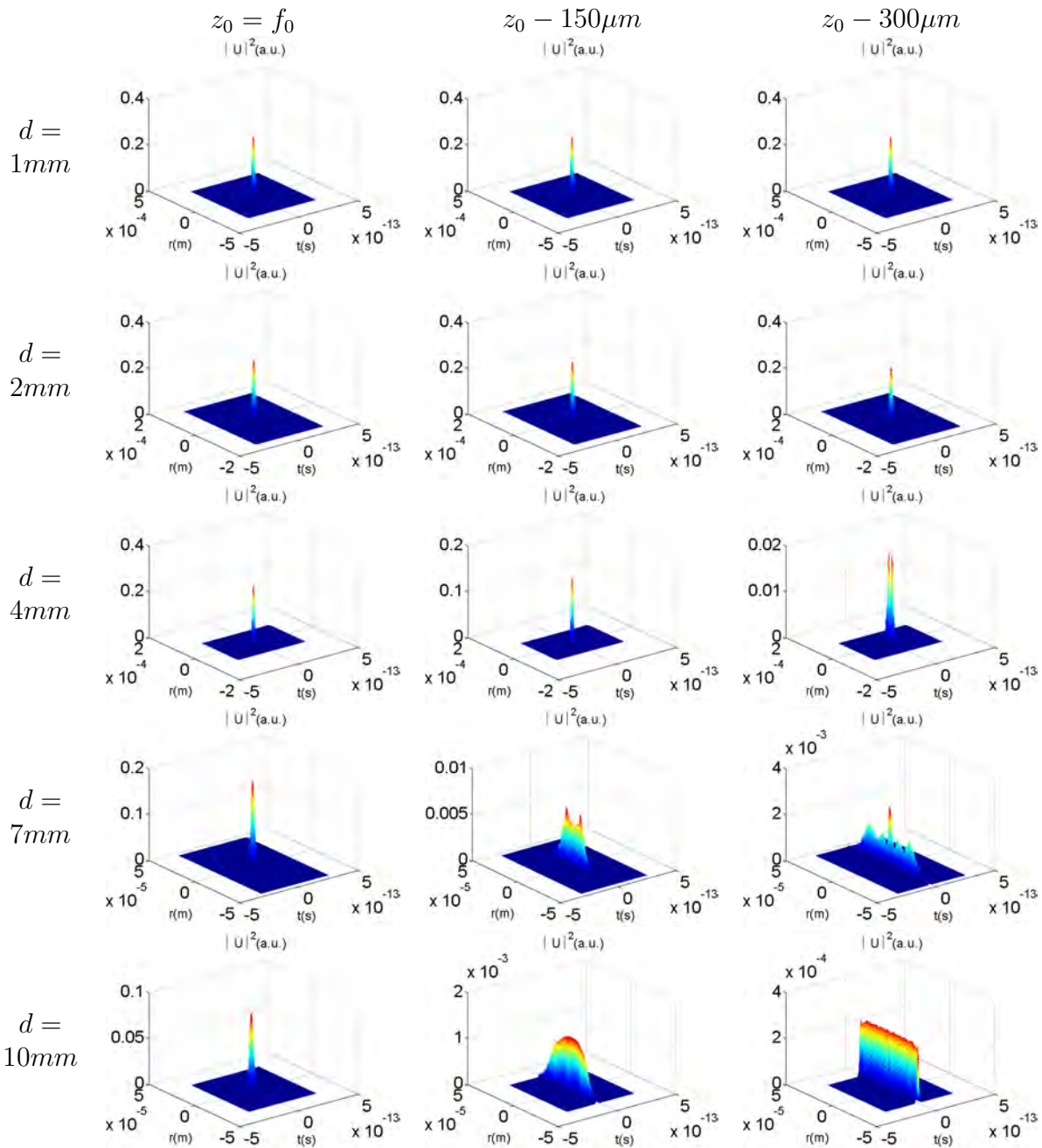


Figura 3.19: Perfil de intensidad de pulsos que se han enfocado por una lente simple de BK7 cuando el pulso tiene una duración temporal de 20fs, con una longitud de onda de la portadora de $\lambda_0 = 810\text{nm}$, y una distancia focal $f=30\text{mm}$. Se ha considerado que no hay aberración esférica solo cromática $A=0$, $\text{PTD}=1$. La solución ha sido encontrada con la integral analítica en las frecuencias, $\text{GVD}=0$.

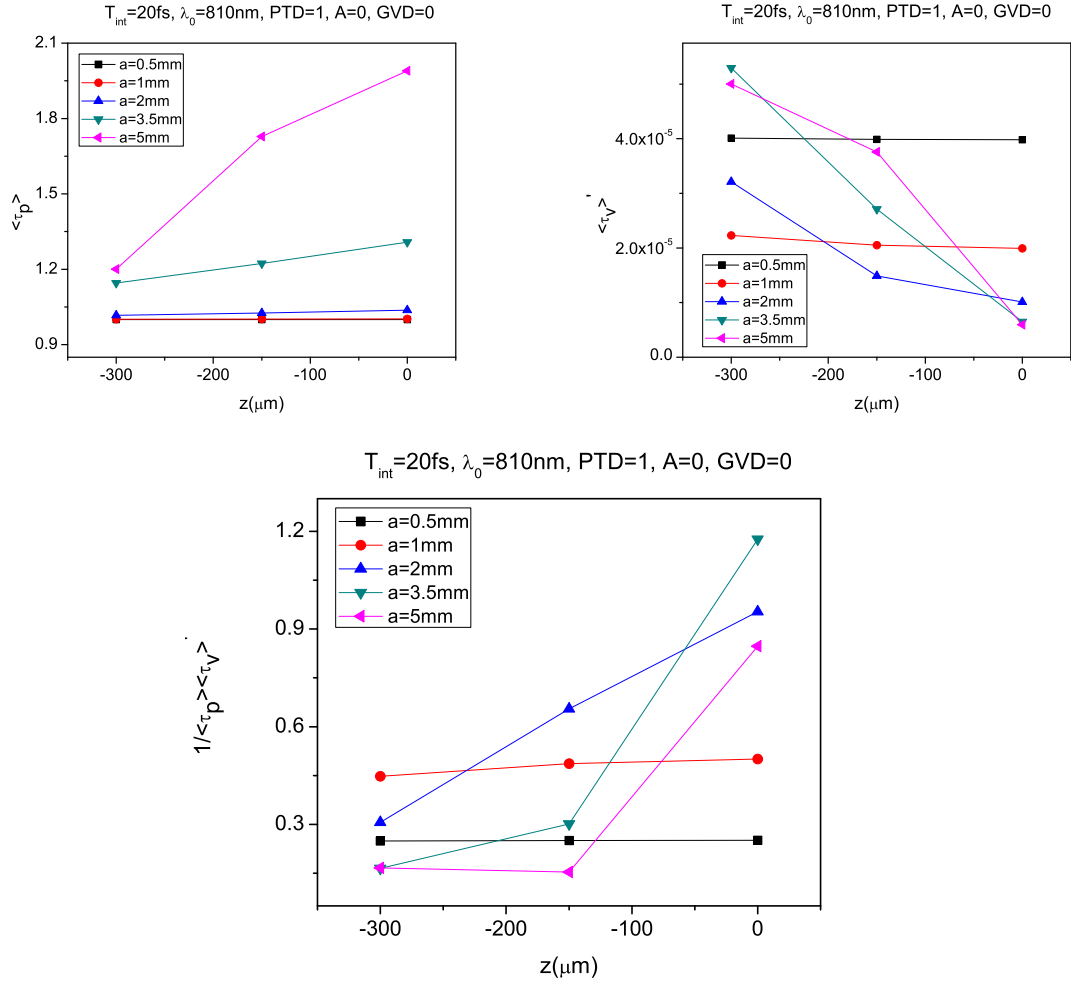


Figura 3.20: En el primer renglón se muestran los segundos momentos en tiempo y espacio respectivamente para cada diámetro, con los datos obtenidos se encuentra la calidad de la intensidad. La posición indicada por 0, corresponde a la posición del foco paraxial, a partir de esta posición se ha desplazado hacia la lente $150\mu\text{m}$ y $300\mu\text{m}$.

En las gráficas (3.20), donde se muestra el valor de $\langle \tau_p \rangle$ podemos apreciar que el ensanchamiento en tiempo para el pulso de 20fs en la posición del foco paraxial, es máximo para la lente con radio igual a $a = 5\text{mm}$ y mínimo para la lente con radio de $a = 0,5\text{mm}$, como es de esperarse por el efecto de PTD, pues depende del semidiámetro al cuadrado a^2 .

De la gráfica de $\langle \tau_v \rangle'$ mostrada en (3.20), podemos apreciar que en el foco paraxial el ensanchamiento espacial máximo se obtiene para la lente con radio igual a 0.5mm , como se esperaba por las propiedades de la transformada de Fourier.

A partir de la formula mostrada por Bor en [104], el radio óptimo para $T_{int}=20\text{fs}$ y $\lambda_0=810\text{nm}$, es $a_{opt} = 4,05\text{mm}$, donde la calidad de la señal es $S_B = 108.5 \times 10^3$. En los resultados expuestos en la gráfica (3.20), la calidad de la señal en el foco paraxial es mayor

para la lente con radio de $a = 3,5\text{mm}$, cuyo valor se aproxima a $S_M = 117.5 \times 10^3$.

Realizando un análisis más detallado, podemos determinar el comportamiento de la calidad de la señal para diferentes radios de la lente, los cuales se muestran en la figura (3.21-a)

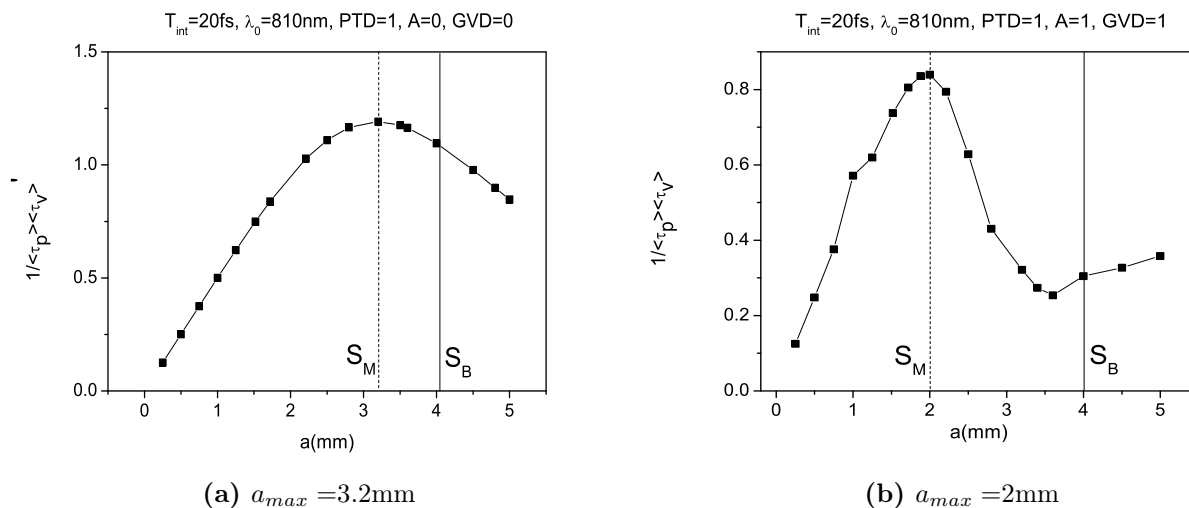


Figura 3.21: La calidad de la señal para un pulso de $T_{int} = 20\text{fs}$, que ha sido enfocado por lentes de BK7 de diferentes radios. La distancia focal de la lente es constante $f_0 = 30\text{mm}$, $\lambda_0 = 810\text{nm}$. Se muestra el valor del radio óptimo, indicado por Bor.

En la figura (3.21-a), el máximo de la calidad de la señal se alcanza para el valor $a=3.2\text{mm}$ en el que únicamente se considero los efectos de PTD, sin embargo, el máximo de la calidad de la señal se alcanza para el valor $a=2\text{mm}$ cuando además de los efectos de PTD, se consideran los efectos de GVD y aberración esférica, como se muestra en la figura (3.21-b).

Para el caso mostrado en la figura (3.21-b), el radio óptimo de Bor, no se puede considerar una buena predicción, ya que la separación entre ellos es del 100 % el valor de S_M .

Pulsos de $T_{int} = 10\text{fs}$, en la región focal de dobletes acromáticos (LaK22-SF6), con diferentes aperturas numéricas.

En este capítulo se analiza la calidad de la señal de un pulso con duración $T_{int} = 10\text{fs}$ y cuya longitud de onda de la portadora es $\lambda_0 = 810\text{nm}$, que ha sido enfocado por el doblete acromático LaK22-SF6. Se presenta el estudio para diferentes aperturas numéricas, de 0.15 hasta 0.33. Cada doblete tiene un semidiámetro de 6mm.

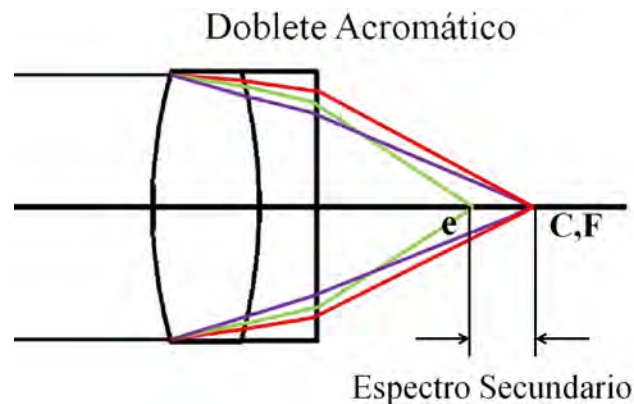


Figura 4.1: Doblete acromático.

Un doblete acromático se obtiene al juntar dos lentes, una de baja dispersión y otra de alta dispersión [68]. Según Herzberger [80], Chester Moor Hall, en 1773, fue el primero que combinó dos lentes, una de tipo crown y otra de tipo flint, para diseñar un doblete acromático. Un doblete acromático tiene la propiedad de tener un foco común para las longitudes de onda azul y roja del espectro visible, se puede trabajar en otro rango espectral

diferente al visible, de tal forma que las longitudes de onda extremas del rango, llamadas C y F , tengan esta propiedad, corrigiendo de manera significativa la aberración cromática y por lo tanto el efecto de PTD. Al remanente de color que es la distancia entre los focos para la longitud de onda verde y el foco de la longitud de onda roja y azul, se le conoce como espectro secundario, [69–71].

Para un doblete acromático delgado, la potencia de una lente, se define como el inverso de la distancia focal $K = 1/f$, por lo que la potencia total de un doblete esta dada por:

$$K_{(d)} = K_{(d)1} + K_{(d)2} \quad (4.1)$$

donde los subíndices 1 y 2, se refieren a las lentes componentes del doblete, y el subíndice d significa que la potencia es evaluada a la longitud de onda promedio [100].

Dado que para una lente delgada con curvaturas de superficie ς_1 y ς_2 e índice de refracción n , la potencia $K = 1/f$, esta dada por

$$K = (n - 1)(\varsigma_1 - \varsigma_2) \quad (4.2)$$

se deduce que el cambio en potencia para un doblete acromático delgado en el rango de longitudes de onda entre C y F , esta dado por

$$\delta K_{(C-F)} = (K_C - K_F)_1 + (K_C - K_F)_2 \quad (4.3)$$

$$= K_{(d)1} \left[\frac{n_C - n_F}{n_d - 1} \right]_1 + K_{(d)2} \left[\frac{n_C - n_F}{n_d - 1} \right]_2 \quad (4.4)$$

$$= K_{(d)1} \bar{V}_{(C-F)1} + K_{(d)2} \bar{V}_{(C-F)2} \quad (4.5)$$

donde $\bar{V}_{(C-F)}$ es el poder de dispersión del vidrio en el rango de longitudes de onda entre C y F y el inverso de esta cantidad es conocido como el poder de dispersión recíproco, indicado por el valor V o número de Abbe

$$V_{(C-F)} = \frac{n_d - 1}{n_C - n_F} = \frac{1}{\bar{V}_{(C-F)}} \quad (4.6)$$

Para que las longitudes de onda C y F tengan un foco común, el cambio en la potencia debe ser igual a cero, por lo que

$$\delta K_{(C-F)} = K_{(d)1} \bar{V}_{(C-F)1} + K_{(d)2} \bar{V}_{(C-F)2} = 0 \quad (4.7)$$

Esta última ecuación puede escribirse en términos de los números de Abbe

$$\frac{K_{(d)1}}{V_{(C-F)1}} + \frac{K_{(d)2}}{V_{(C-F)2}} = 0 \quad (4.8)$$

Las ecuaciones (4.1) y (4.8) son las ecuaciones que debe satisfacer un doblete acromático de potencia $K_{(d)}$. Existe otro método de diseño de dobletes acromáticos en fase y en grupo, realizado por Vaughan [72], con lo cual, es posible corregir el efecto producido por PTD.

Los dobletes acromáticos analizados en este capítulo, han sido tomados del catálogo de Edmund Optics [99], los cuales han sido diseñados en el rango de frecuencias (750-1100)nm, que esta dentro del rango del infrarrojo en el espectro electromagnético. Cada doblete esta compuesto por los vidrios LaK22 y SF6, todos ellos de semidiámetro igual a 6mm y diferente distancia focal, por lo que se presentan diferentes aperturas numéricas.

El análisis realizado en este capítulo, es para pulsos con una duración de 10fs, que corresponde al ancho total del perfil de intensidad a $1/e$, por lo que la duración del pulso se describe por T_{int} y una longitud de onda de la portadora $\lambda_0 = 810\text{nm}$. La forma del perfil de intensidad de algunos pulsos mencionados a continuación, se pueden ver en el apéndice D.

En cada uno de los siguientes casos se muestra el efecto que tiene la aberración esférica, el efecto de PTD y GVD de tercer orden, de manera independiente y después el resultado de todos estos efectos, en la determinación de los anchos espaciales y temporales $\langle \tau_v \rangle$ y $\langle \tau_p \rangle$ respectivamente, para diferentes posiciones sobre el eje óptico, con estos datos se ha determinado la calidad de la señal en cada una de estas posiciones. A partir del foco paraxial del doblete, hemos obtenido el valor de la calidad de la señal cada $50\mu\text{m}$ hacia la lente y en la dirección contraria, hasta una distancia de $400\mu\text{m}$ en ambas direcciones. También se ha analizado la calidad de la señal de los pulsos cuando no hay ninguno de los efectos mencionados, con lo que se ha determinado como ésta ha sido afectada sólo por el desenfocamiento.

Los valores de $\langle \tau_p \rangle'$ y $\langle \tau_v \rangle'$ han sido normalizados. Como mencionamos, en este capítulo sólo hemos estudiado pulsos con una duración de 10fs, por lo que el valor de $\langle \tau_p \rangle$ es igual a $\langle \tau_p \rangle' / 10fs$. En cada caso el ensanchamiento espacial se obtiene dividiendo el valor de $\langle \tau_v \rangle'$, entre el valor de $\langle \tau_v \rangle_0$ que corresponde al ancho de una imagen limitada por difracción. Este resultado se obtiene al considerar un pulso que se ha propagado por el doblete sin que los efectos de aberración esférica, PTD y GVD lo afecten, en el programa se indican como $A=0$, $PTD=0$ y $GVD=0$.

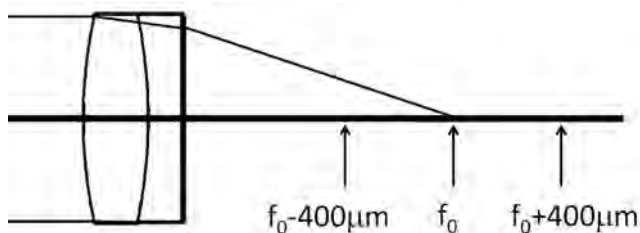
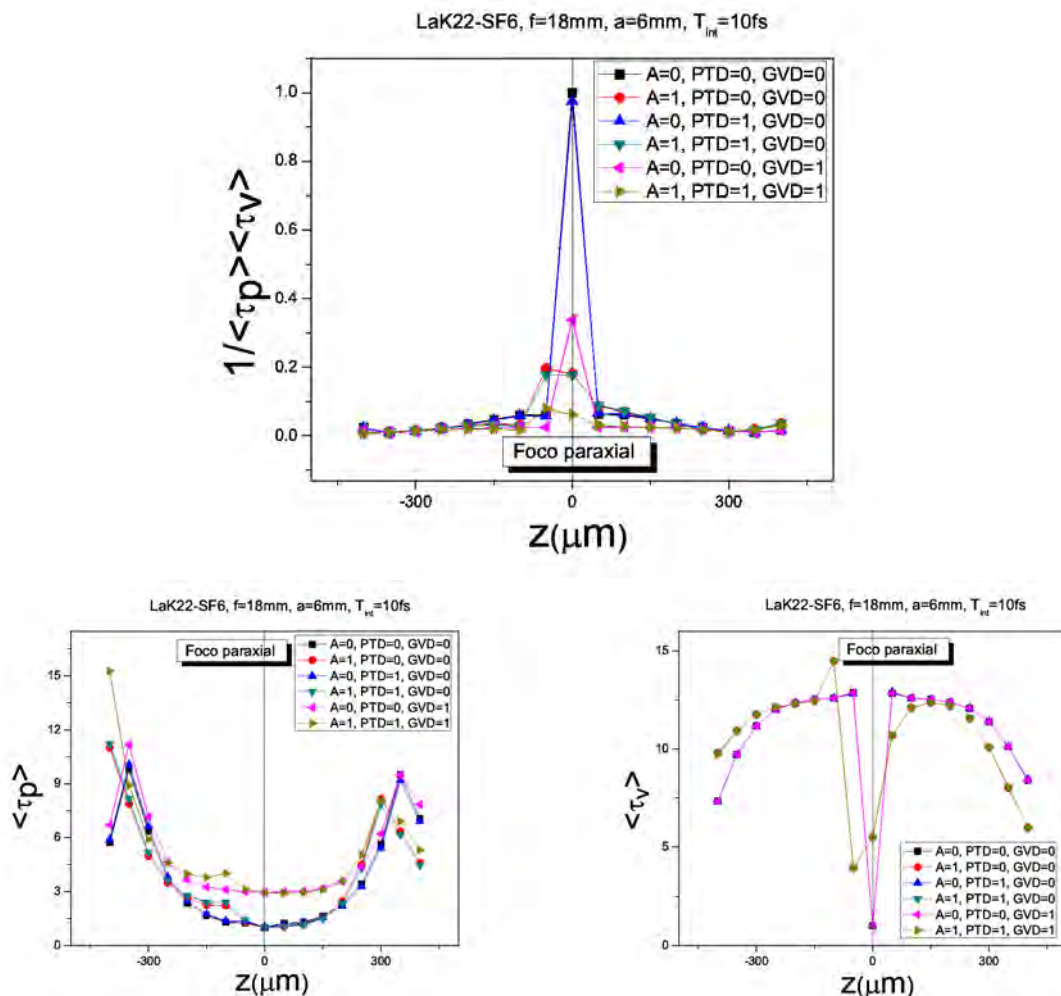


Figura 4.2: Se muestran dos posiciones sobre el eje óptico donde se calcula la calidad de la señal.

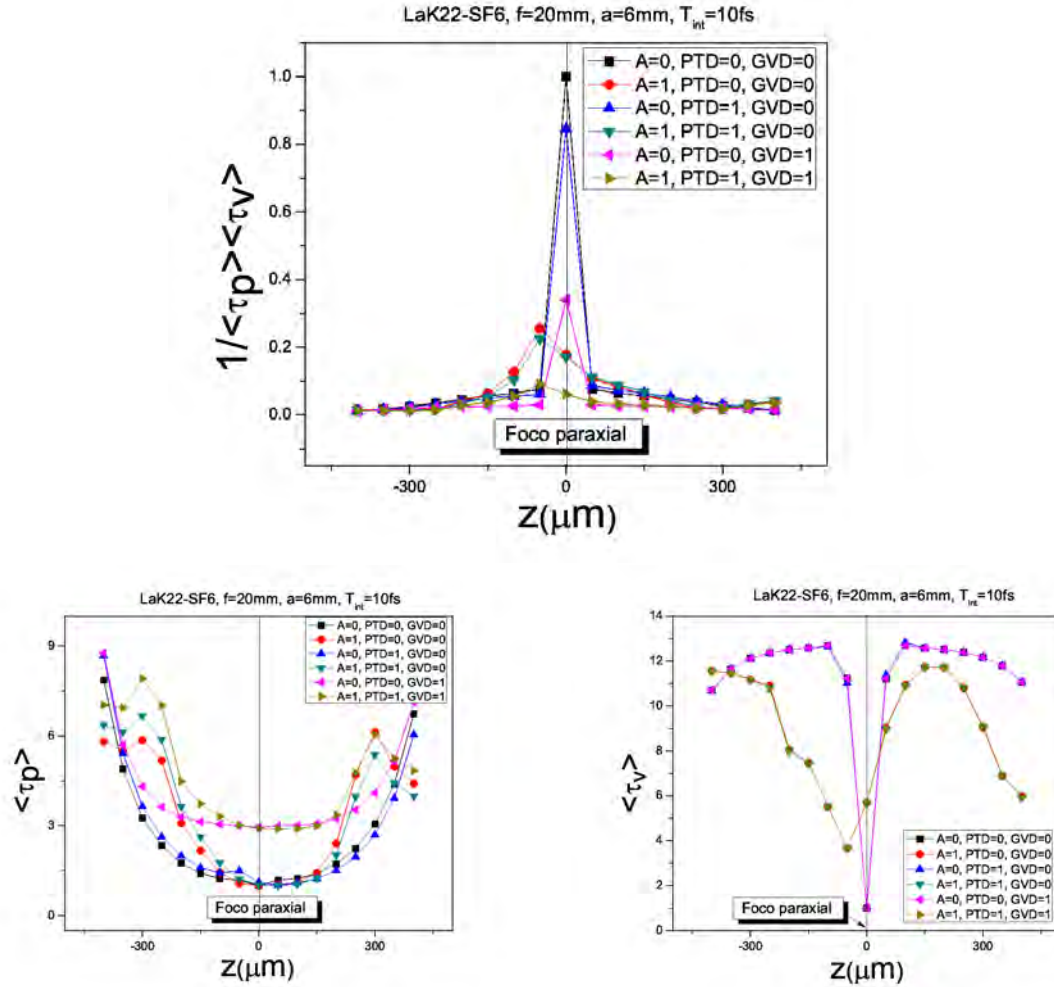
En las tablas de valores que en cada sección se mencionan, solo consideran los valores del foco paraxial y el valor a 50 micras hacia la lente, esto se debe a que estos son los puntos sobre el eje óptico para los cuales se obtienen los valores máximos.

4.1. Doblete acromático de distancia focal $f_0=18\text{mm}$



LaK22-SF6, 10fs, a=6mm, $\lambda_0 = 810\text{nm}$								
			Z_{f_0}			$Z_{f_0} - 50\mu\text{m}$		
A	PTD	GVD	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle$	$1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle$	$1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$
0	0	0	1	1	1	1.2489	12.876	0.0621
1	0	0	1	5.5141	0.1813	1.2964	3.9369	0.1959
0	1	0	1.0176	1.0077	0.9750	1.3592	12.806	0.0574
1	1	0	1.0134	5.5173	0.1788	1.4239	3.9566	0.1775
0	0	1	2.9512	1.0004	0.3386	2.9837	12.866	0.0260
1	1	1	2.9419	5.5185	0.0615	3.1294	3.9601	0.0806

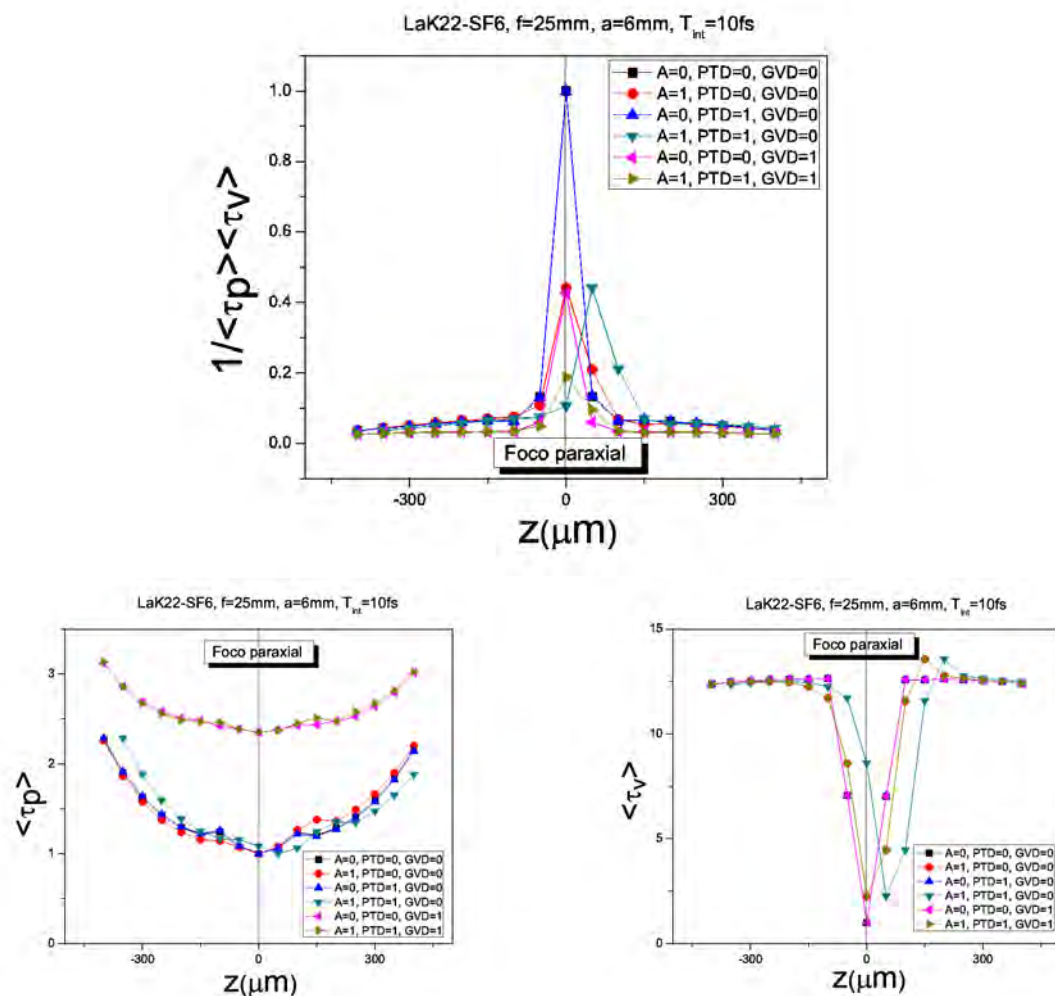
Figura 4.3: Se compara la calidad de la señal para pulsos de 10fs y $\lambda = 810\text{nm}$, en la región focal de un doblete acromático de apertura numérica 0.3. Los valores de $\langle \tau_v \rangle$ se escalaron respecto al valor de $\langle \tau_v \rangle_0 = 1,8845 \times 10^{-6}\text{m}$.

4.2. Doblete acromático de distancia focal $f_0=20\text{mm}$ 

LaK22-SF6, 10fs, a=6mm, $\lambda_0 = 810\text{nm}$								
			z_{f_0}			$z_{f_0} - 50\mu\text{m}$		
A	PTD	GVD	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle$	$1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle$	$1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$
0	0	0	1	1	1	1.1811	11.243	0.0753
1	0	0	1	5.6706	0.1763	1.0717	3.6599	0.2549
0	1	0	1.1207	1.0543	0.8462	1.4979	11.015	0.0606
1	1	0	1.0268	5.6887	0.1712	1.2145	3.6719	0.2242
0	0	1	2.9498	1.0004	0.3388	2.9941	11.232	0.0297
1	1	1	2.9070	5.68875	0.0604	3.0149	3.6747	0.0902

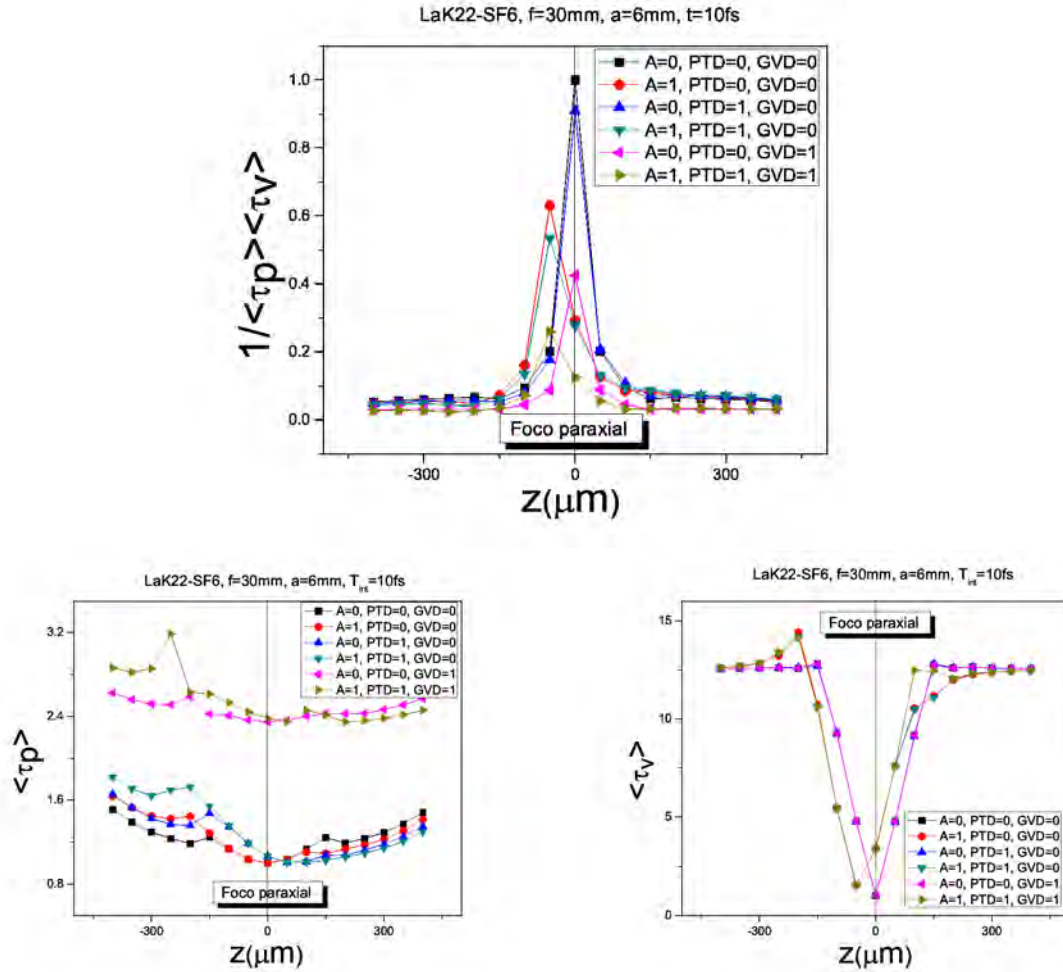
Figura 4.4: Se compara la calidad de la señal para pulsos de 10fs y $\lambda_0 = 810\text{nm}$, en la región focal de un doblete acromático de apertura numérica 0.3. Los valores de $\langle \tau_v \rangle'$ se escalaron respecto al valor de $\langle \tau_v \rangle_0 = 2,1196 \times 10^{-6}$.

4.3. Doblete acromático de distancia focal $f_0=25\text{mm}$



LaK22-SF6, 10fs, $a=6\text{mm}$, $\lambda_0 = 810\text{nm}$								
			Z_{f_0}			$Z_{f_0} - 50\mu\text{m}$		
A	PTD	GVD	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle$	$1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle$	$1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$
0	0	0	1	1	1	1.0755	7.0539	0.1318
1	0	0	1	2.2664	0.4412	1.0718	8.5938	0.1085
0	1	0	1.0006	1.0029	0.9990	1.0894	7.0432	0.1303
1	1	0	1.0850	8.5997	0.1071	1.1562	11.718	0.0738
0	0	1	2.3512	1.0002	0.4252	2.3871	7.0481	0.0594
1	1	1	2.3517	2.2657	0.1876	2.3856	8.6022	0.04873

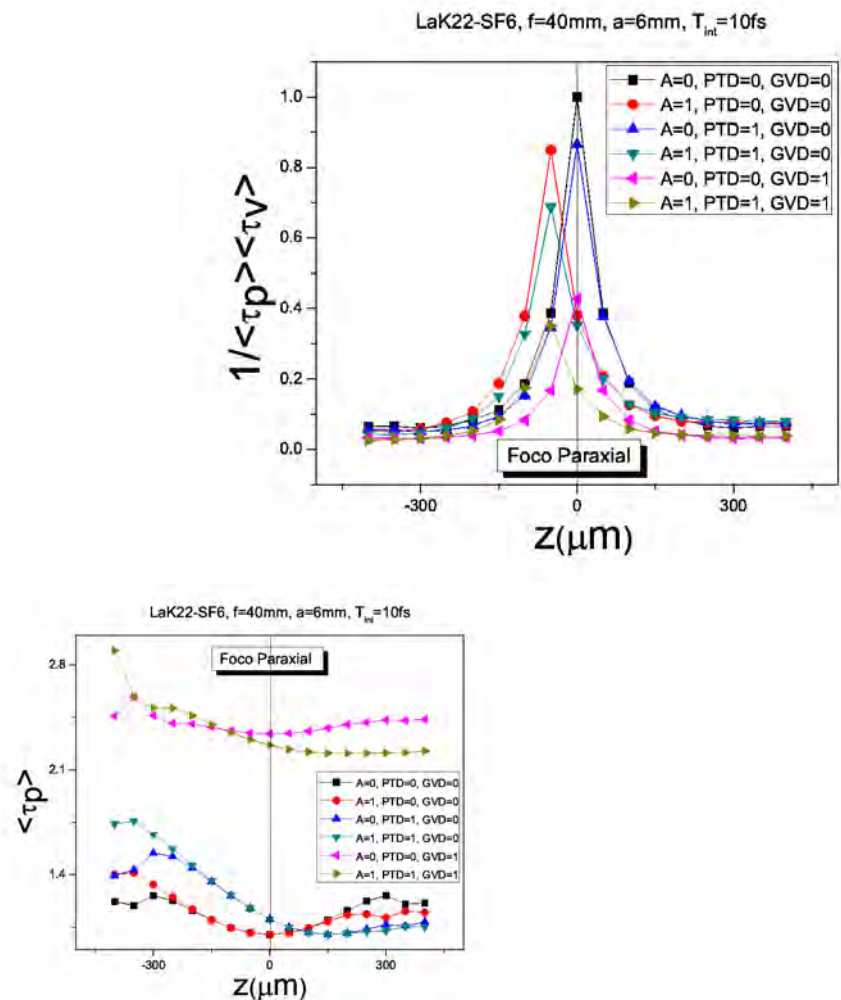
Figura 4.5: Se compara la calidad de la señal para pulsos de 10fs y $\lambda_0 = 810\text{nm}$, en la región focal de un doblete acromático de apertura numérica 0.24. Los valores de $\langle \tau_v \rangle'$ se escalan respecto al valor de $\langle \tau_v \rangle_0 = 2,7105 \times 10^{-6}$.

4.4. Doblete acromático de distancia focal $f_0=30\text{mm}$ 

LaK22-SF6, 10fs, a=6mm, $\lambda_0 = 810\text{nm}$								
			z_{f_0}			$z_{f_0} - 50\mu\text{m}$		
A	PTD	GVD	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle$	$1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle$	$1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$
0	0	0	1	1	1	1.0361	4.7906	0.2014
1	0	0	1	3.4123	0.2930	1.0362	1.5305	0.6304
0	1	0	1.0670	1.0298	0.9100	1.1885	4.7683	0.1764
1	1	0	1.0662	3.3667	0.2784	1.1893	1.5726	0.5346
0	0	1	2.3493	1.0002	0.4255	2.3672	4.7902	0.0881
1	1	1	2.3811	3.3624	0.1249	2.4417	1.5763	0.2598

Figura 4.6: Se compara la calidad de la señal para pulsos de 10fs y $\lambda_0 = 810\text{nm}$, en la región focal de un doblete acromático de apertura numérica 0.2. Los valores de $\langle \tau_v \rangle'$ se escalaron respecto al valor de $\langle \tau_v \rangle_0 = 3,8373 \times 10^{-6}$.

4.5. Doblete acromático de distancia focal $f_0=40\text{mm}$



LaK22-SF6, 10fs, a=6mm, $\lambda_0 = 810\text{nm}$								
			z_{f_0}			$z_{f_0} - 50\mu\text{m}$		
A	PTD	GVD	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle$	$1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle$	$1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$
0	0	0	1	1	1	1.0113	2.5592	0.3863
1	0	0	1	2.6330	0.3797	1.0113	1.1646	0.8490
0	1	0	1.1035	1.0464	0.8658	1.1754	2.4564	0.3463
1	1	0	1.1029	2.5763	0.3519	1.1753	1.2359	0.6883
0	0	1	2.3404	1.0001	0.4272	2.3465	2.5570	0.1666
1	1	1	2.2647	2.5759	0.1703	2.3016	1.2353	0.3495

Figura 4.7: Se compara la calidad de la señal para pulsos de 10fs y $\lambda_0 = 810\text{nm}$, en la región focal de un doblete acromático de apertura numérica 0.2. Los valores de $\langle \tau_v \rangle'$ se escalaron respecto al valor de $\langle \tau_v \rangle_0 = 4,3996 \times 10^{-6}$.

4.6. Análisis general

A continuación se muestra la calidad de la señal para cada doblete, respecto al efecto que tiene cada uno de manera independiente sobre ésta.

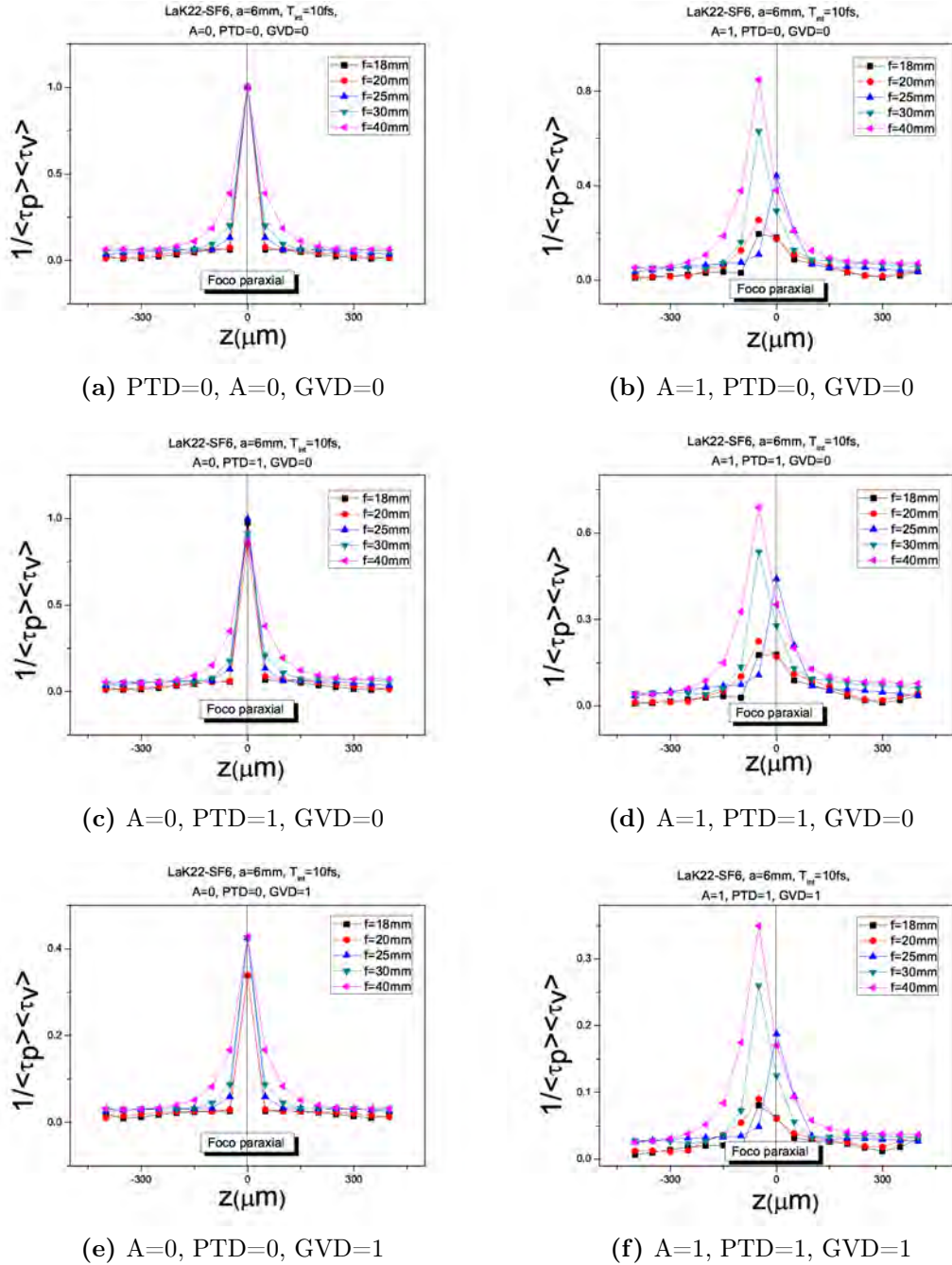


Figura 4.8: Efectos de cada término.

De la figura (4.8-a), donde se consideran nulos los efectos de la aberración esférica ($A=0$), la diferencia del tiempo de propagación ($PTD=0$) y la dispersión de la velocidad de grupo ($GVD=0$), se observa que la calidad de la señal es máxima e igual a uno en la posición del foco paraxial y que decae rápidamente conforme se desenfoca. En todos los casos la señal es prácticamente cero a partir de $200\mu\text{m}$ del foco paraxial de la lente. La calidad de la señal i.e. $1/ \langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle$, va disminuyendo a medida que la apertura numérica es mayor, pues para el doblete de distancia focal $f = 40\text{mm}$ se tiene una señal mayor en la vecindad del foco paraxial y en orden descendente para los dobletes de distancia focal $f=30\text{mm}$, $f=25\text{mm}$, $f=20\text{mm}$ y $f=18\text{mm}$.

De los efectos estudiados, la aberración es la que tiene efectos mayores para la localización de la calidad de la señal máxima. Por los resultados expuestos en la figura (4.8-b), concluimos que la aberración esférica es menor para el doblete de distancia focal $f=40\text{mm}$ y aumenta al ir disminuyendo la distancia focal, lo que esta de acuerdo con la ecuación (1.90).

El efecto de GVD de tercer orden provoca una disminución en la calidad de la señal de manera más importante que el efecto de PTD y la aberración esférica, como se puede ver al comparar las figuras (4.8-b) y (4.8-c), con la figura (4.8-e). El efecto de GVD se puede corregir a todos los órdenes con un compresor de pulsos [24–27], la compresión de pulsos puede hacerse a través de distintos medios como prismas y rejillas [61]. Un compresor puede introducir la cantidad de chirp necesario para compensar el chirp en el pulso que se genera en éste al pasar por la lente [62]. Al corregirse la señal de GVD a todos los órdenes, la señal obtenida sería la mostrada en la gráfica (4.8-d), con base en ello se va a buscar mejorar la calidad de la señal con dobletes apocromáticos que se presenta en el capítulo 6.

El efecto de GVD de tercer orden que se puede apreciar en la figura (4.8-e), disminuye en gran medida la calidad de la señal. En la posición del foco paraxial, hay tres dobletes que comparten el valor máximo de la calidad de la señal, estas son las de distancia focal 25mm, 30mm y 40mm, mientras que para los dobletes de distancia focal 18mm y 20mm, el valor de la calidad de la señal en el foco paraxial es aún menor.

Todos estos efectos, atenuan la calidad de la señal de tal manera que el resultado se expone en la gráfica (4.8-f), donde se puede apreciar que en orden descendente respecto a la distancia focal, la señal se va debilitando cada vez más. Siendo mayor para el doblete acromático de apertura numérica 0.15 y distancia focal 40mm. La señal máxima se obtiene a $50\mu\text{m}$ hacia la lente y no en la posición del foco paraxial, debido a la aberración esférica.

Los valores de la calidad de la señal expuestos en la gráfica (4.8-d), se obtendrían si se usara un sistema que compensara el efecto de GVD a todos los órdenes introducido por la lente.

Estudio del doblete acromático, LaK22-SF6, de distancia focal $f_0=40\text{mm}$, para pulsos de diferente duración

En este capítulo se estudia la distorsión que ha sufrido un pulso de luz cuya longitud de onda de la onda portadora es de 810nm, después que ha pasado a través del doblete acromático de distancia focal 40mm y semidiámetro $a = 6\text{mm}$, estudiado en el capítulo anterior. Ahora vamos a estudiar como los efectos de GVD de tercer orden cobran importancia conforme la duración del pulso va disminuyendo. El análisis de la dispersión de la velocidad de grupo de tercer orden como se estudia en esta tesis, no es un tema que se pueda encontrar en la literatura actual, sin embargo, se ha visto que la corrección experimental de los términos de GVD mayores al tercer orden, mejoran la calidad de la señal en imágenes obtenidas por medio de la microscopía de dos fotones [27], hasta 8 veces mayor que con la corrección de sólo el segundo orden de GVD.

El doblete acromático formado por los vidrios LaK22-SF6, ha sido diseñado en el rango infrarrojo de (750nm, 1100nm), y ha sido tomado del catálogo de Edmund [99]. Este doblete tiene una abertura numérica, $\text{NA}=0.15$.

La calidad de la señal y los segundos momentos presentados en cada gráfica se han calculado para 17 posiciones diferentes del plano focal con respecto al foco paraxial. La posición $z=0\mu\text{m}$ corresponde a la posición del foco paraxial. Cada dato dista $50\mu\text{m}$ del siguiente. A continuación se presenta la calidad de la señal para pulsos de diferente duración, $T_{int} = 30\text{fs}$, $T_{int} = 20\text{fs}$, $T_{int} = 10\text{fs}$ y $T_{int} = 4.5\text{fs}$, cada una de ellas se muestra con el resultado a segundo orden y a tercer orden de GVD. En el resultado a segundo orden, sólo se ha considerado el efecto de PTD y la aberración esférica, ya que el efecto de GVD de segundo orden se puede corregir, por lo que en este caso, todos los órdenes de GVD se

- $f=40\text{mm}$
- $a=6\text{mm}$
- $d_1 = 4,5\text{mm}$
- $d_2 = 2,5\text{mm}$
- $NA = 0,15$

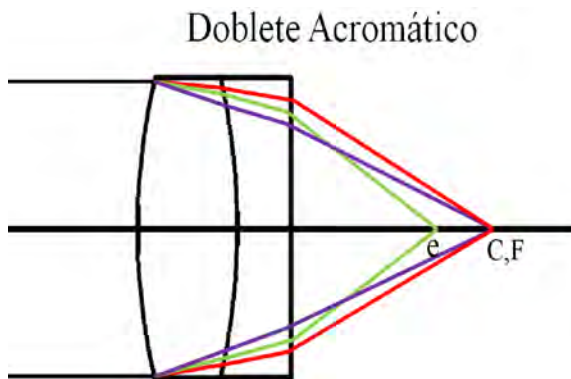


Figura 5.1: Doblete acromático.

han tomado igual a cero. En las señales que se indican como tercer orden, se ha incluido el efecto de GVD de tercer orden, así como el efecto de PTD y de aberración esférica.

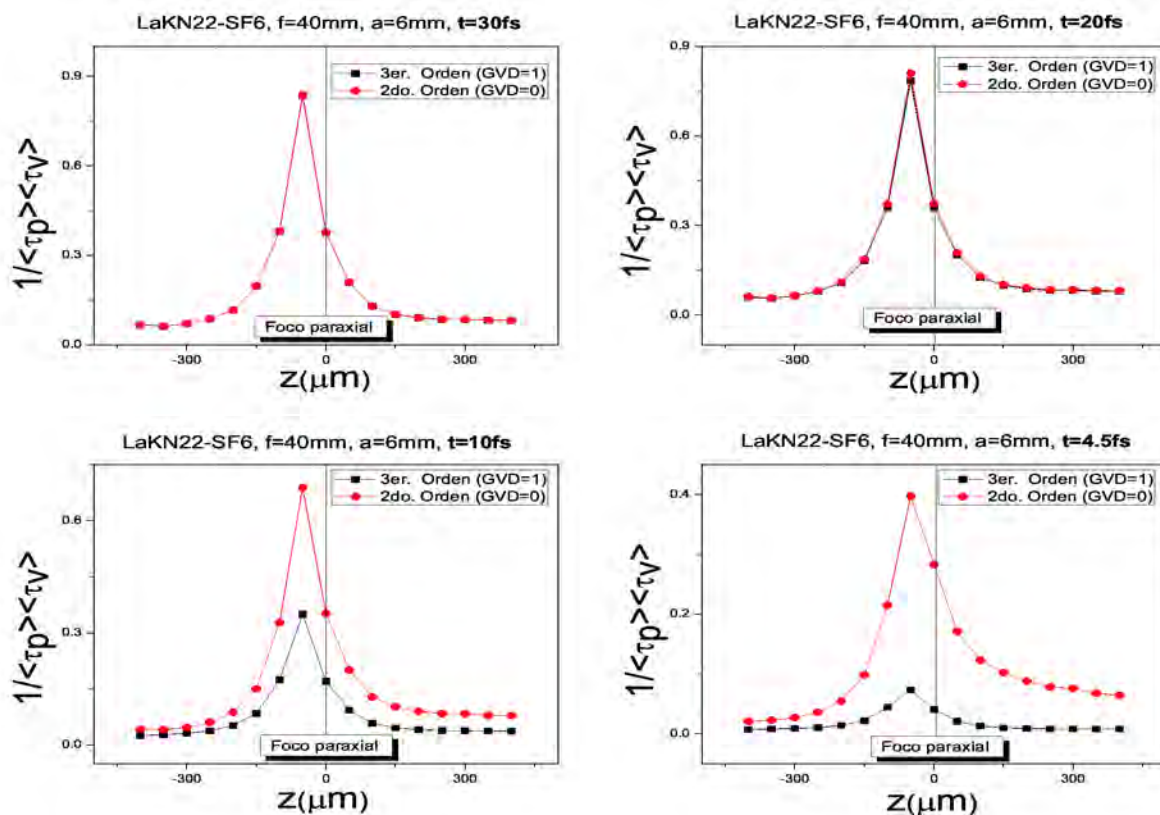


Figura 5.2: Calidad de la señal obtenida para el doblete acromático LaK22-SF6, con los efectos de PTD ($PTD=1$) y aberración esférica ($A=1$). En la señal indicada como segundo orden no se ha considerado el efecto de GVD de ningún orden. En el caso indicado como tercer orden, se ha tomado el efecto de GVD de tercer orden.

En la figura (5.2), se concluye que el efecto de GVD de tercer orden, es un efecto que cobra importancia al disminuir el tiempo del pulso. Para pulsos menores de 20fs, este efecto no puede despreciarse [14, 18, 54, 108]. La calidad de la señal se ve seriamente disminuida por este efecto, por lo que un compresor que solo corrige el segundo orden de GVD no es suficiente para optimizar la señal.

Aún cuando el efecto de GVD sea nulo ($GVD=0$), la señal es atenuada al disminuir el tiempo del pulso debido a la diferencia del tiempo de propagación, generada por el remanente de color del doblete acromático y por la aberración esférica de éste.

Para verificar que el máximo en la señal, se encuentra a cercano a la distancia de 50 micras hacia la lente a partir del foco paraxial, se han estudiado los valores de la calidad de la señal alrededor de este valor, los valores encontrados se muestran en la siguiente figura (5.3).

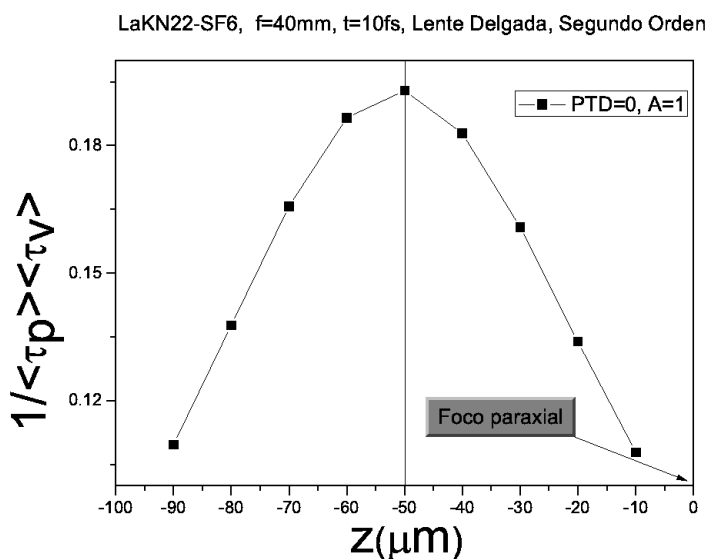


Figura 5.3: Se muestra que la máxima intensidad se encuentra en una posición cercana a la distancia de 50 micras hacia la lente, medida a partir del foco paraxial.

Con estos resultados se ha comprobado que el valor máximo en la calidad de la señal esta localizado en una posición cercana a la distancia de 50 micras hacia la lente, medida a partir de la posición del foco paraxial, donde se localiza el círculo de mínima confusión.

5.1. Análisis a segundo orden en la expansión del número de onda

Para conocer como es la calidad de la señal para pulsos que se han propagado por este doblete acromático, pero en el cual no se contemplan los efectos de la dispersión de la velocidad de grupo, presentamos un análisis sobre los efectos de PTD y aberración esférica,

para analizar como el pulso es ensanchado por estos dos efectos. Para pulsos con duración de $T_{int} = 4,5\text{fs}$, se muestran las señales obtenidas.

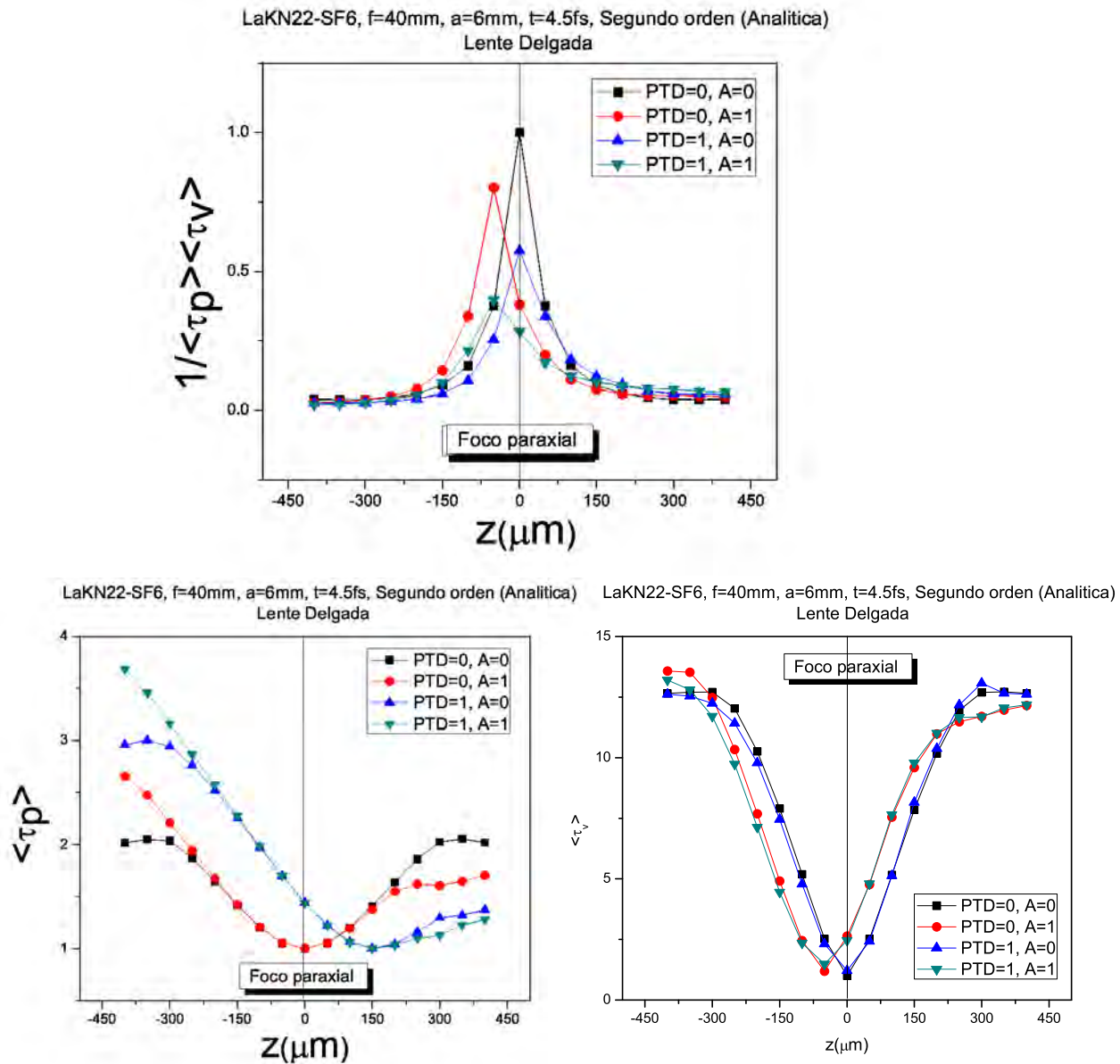


Figura 5.4: Calidad de la señal obtenida para el doblete acromático LaK22-SF6, para un pulso con duración inicial de 4.5fs y $\lambda = 810\text{nm}$. Se muestra la calidad de la señal a diferentes distancias respecto al foco paraxial. Se muestra el segundo momento en espacio y tiempo.

De la gráfica del momento $\langle \tau_v \rangle$, podemos ver que la aberración esférica produce un ensanchamiento mínimo a la distancia de 50 micras a partir del foco paraxial, medido hacia la lente. El valor máximo de la señal cuando se tiene el efecto de PTD y la aberración esférica es de $S \approx 0.47$.

Siguiendo el mismo criterio, se presenta la calidad de la señal para un pulso que incide sobre la lente con una duración de $T_{int} = 10\text{fs}$.

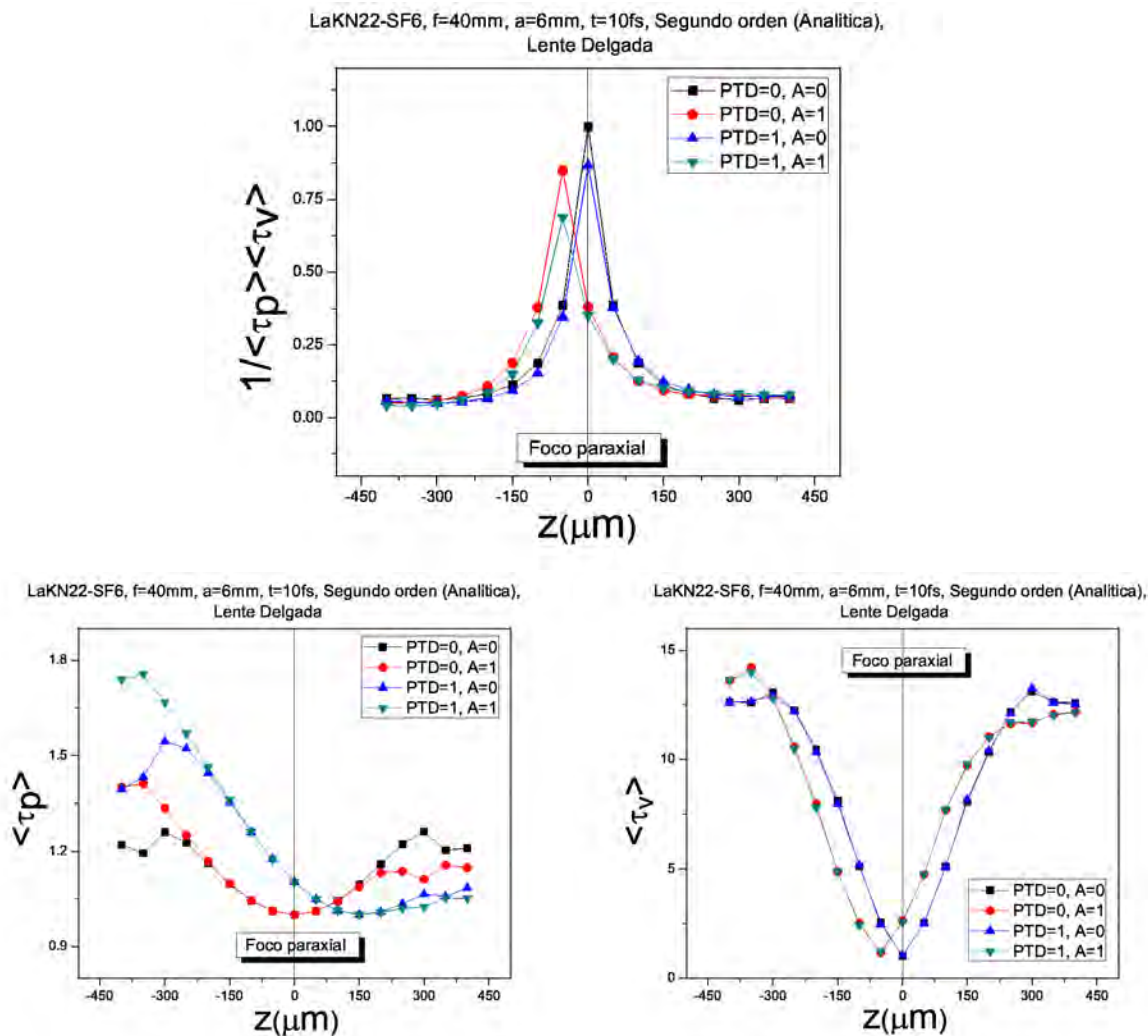


Figura 5.5: Se muestra la calidad de la señal y los segundos momentos en tiempo y espacio para el doblete de distancia focal $f=40\text{mm}$ para un pulso incidente de 10fs con una portadora de 810nm . Se hacen comparaciones con diferentes valores de la aberración y de PTD. El caso de $A=0$ y $\text{PTD}=0$, simula una lente ideal sin aberración, ni PTD. El caso $A=1$, $\text{PTD}=0$, simula el caso de una lente con aberración esférica. El caso $A=0$ y $\text{PTD}=1$ simula el caso de una lente sin aberración esférica.

El valor máximo de la señal cuando se tiene el efecto de PTD y la aberración esférica es de $S \approx 0.68$.

A continuación se presenta un análisis similar para un pulso incidente con una duración de $T_{int} = 20\text{fs}$.

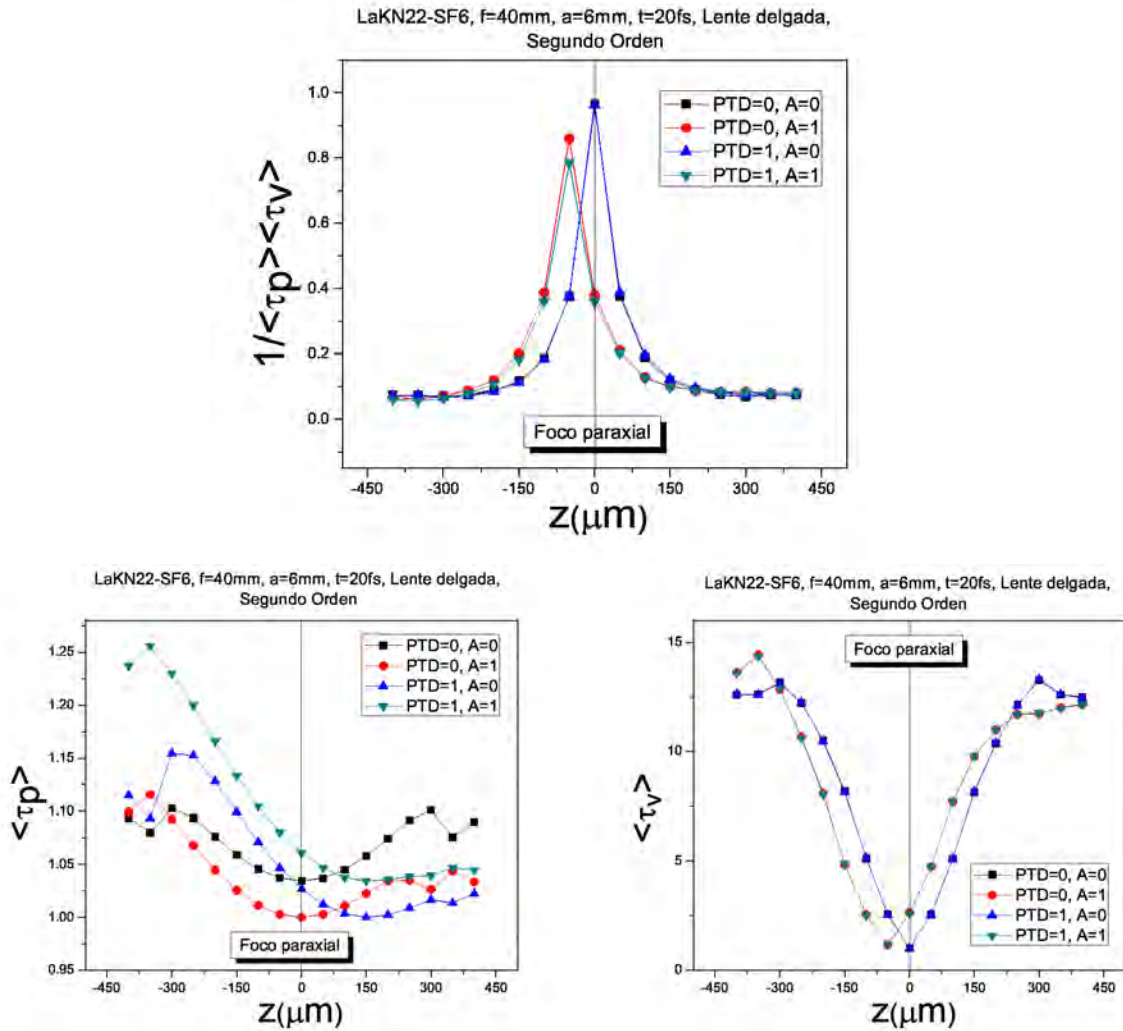


Figura 5.6: Se muestra la calidad de la señal y los segundos momentos en tiempo y espacio para el doblete acromático de distancia focal $f=40\text{mm}$. Se muestran los resultados para un pulso de duración 20fs y $\lambda = 810\text{nm}$.

El valor máximo de la señal cuando se tiene el efecto de PTD y la aberración esférica es de $S \approx 0.78$.

Si la duración del pulso incidente es de $T_{int} = 200\text{fs}$, la calidad de la señal y los segundos momentos obtenidos al tomar el segundo orden en la expansión del número de onda, se muestran en la figura (5.7). Se hacen comparaciones con diferentes valores de la aberración y de PTD. El caso de $A=0$ y $\text{PTD}=0$, simula una lente ideal sin aberración. El caso $A=1$, $\text{PTD}=0$, simula el caso de una lente con aberración esférica. El caso $A=0$ y $\text{PTD}=1$ simula el caso de una lente sin aberración esférica pero con aberración cromática.

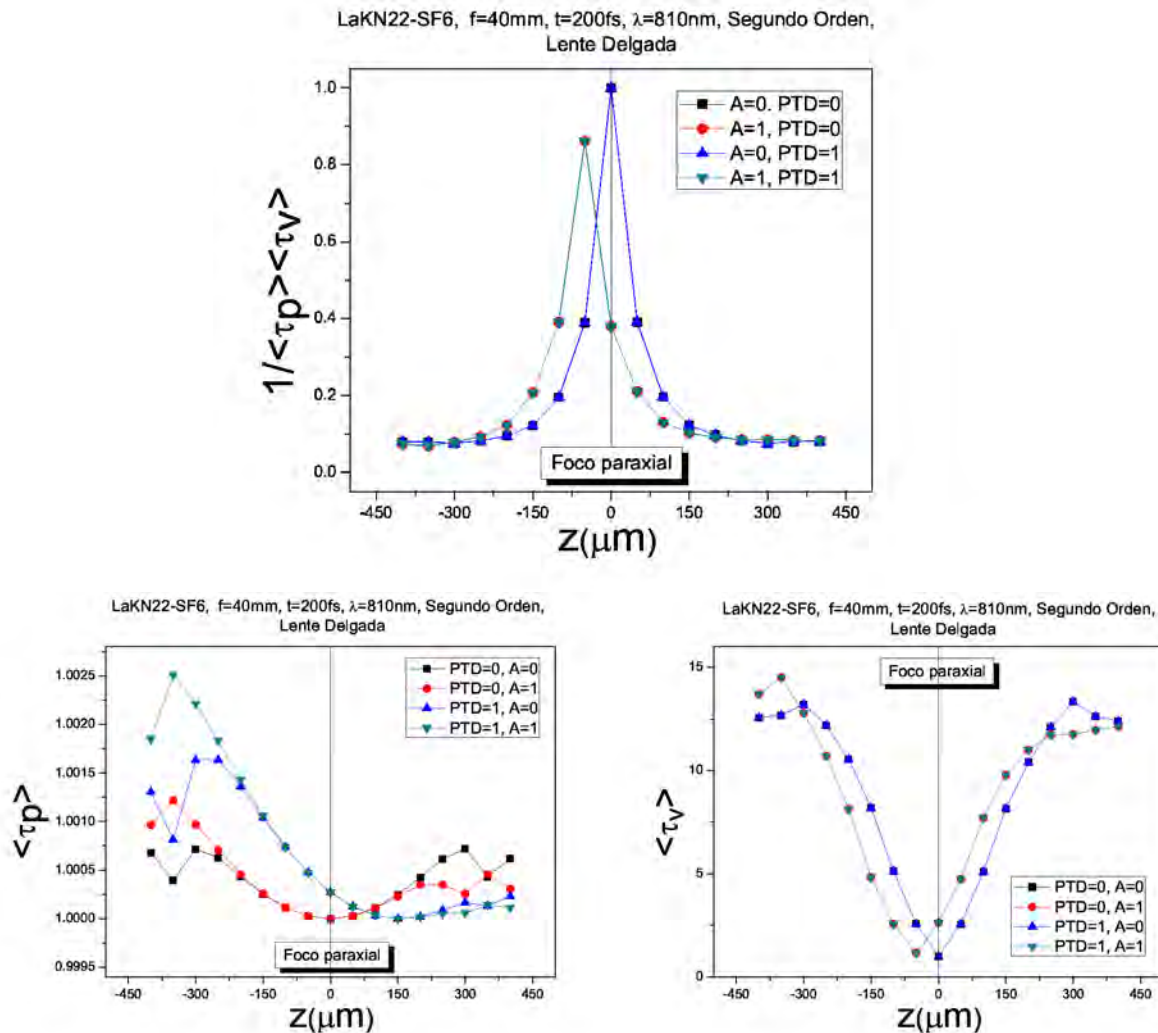


Figura 5.7: Se muestra la calidad de la señal para el doblete de distancia focal $f=40\text{mm}$.

El valor máximo de la señal cuando se tiene el efecto de PTD y la aberración esférica es de $S \approx 0.86$.

Por las gráficas mostradas en (5.7), la calidad de la señal es la misma para los casos en que $\text{PTD}=0$ y $A=0$ y para el caso $\text{PTD}=1$ y $A=0$, de lo que se concluye que para esta duración del pulso, el efecto de PTD es despreciable. En las curvas donde se considera la aberración esférica, i.e. las indicadas con $A=1$, se observa un desplazamiento del máximo de la señal a 50 micras hacia la lente, por lo que concluimos que la aberración esférica provoca este desplazamiento de la señal máxima. La calidad de la señal ha sido obtenida al considerar la expansión del número de onda hasta el segundo orden, en donde hemos supuesto que la dispersión de la velocidad de grupo es cero a todos los órdenes, i.e., $\text{GVD}=0$.

Los resultados del segundo momento en espacio, se exponen en la gráfica de $\langle \tau_v \rangle$,

donde se observa que la aberración esférica provoca el desplazamiento del valor mínimo, a 50 micras hacia la lente, por lo que la aberración mínima no se obtiene en la posición del foco paraxial, sino a 50 micras hacia la lente.

A continuación en la figura (5.8), se presenta la calidad de la señal para pulsos de 10fs, que se han propagado por el doblete acromático, cuando se considera el efecto de GVD de tercer orden, el efecto de PTD y la aberración esférica. Se analiza como cada uno de estos términos afecta el ensanchamiento del pulso.

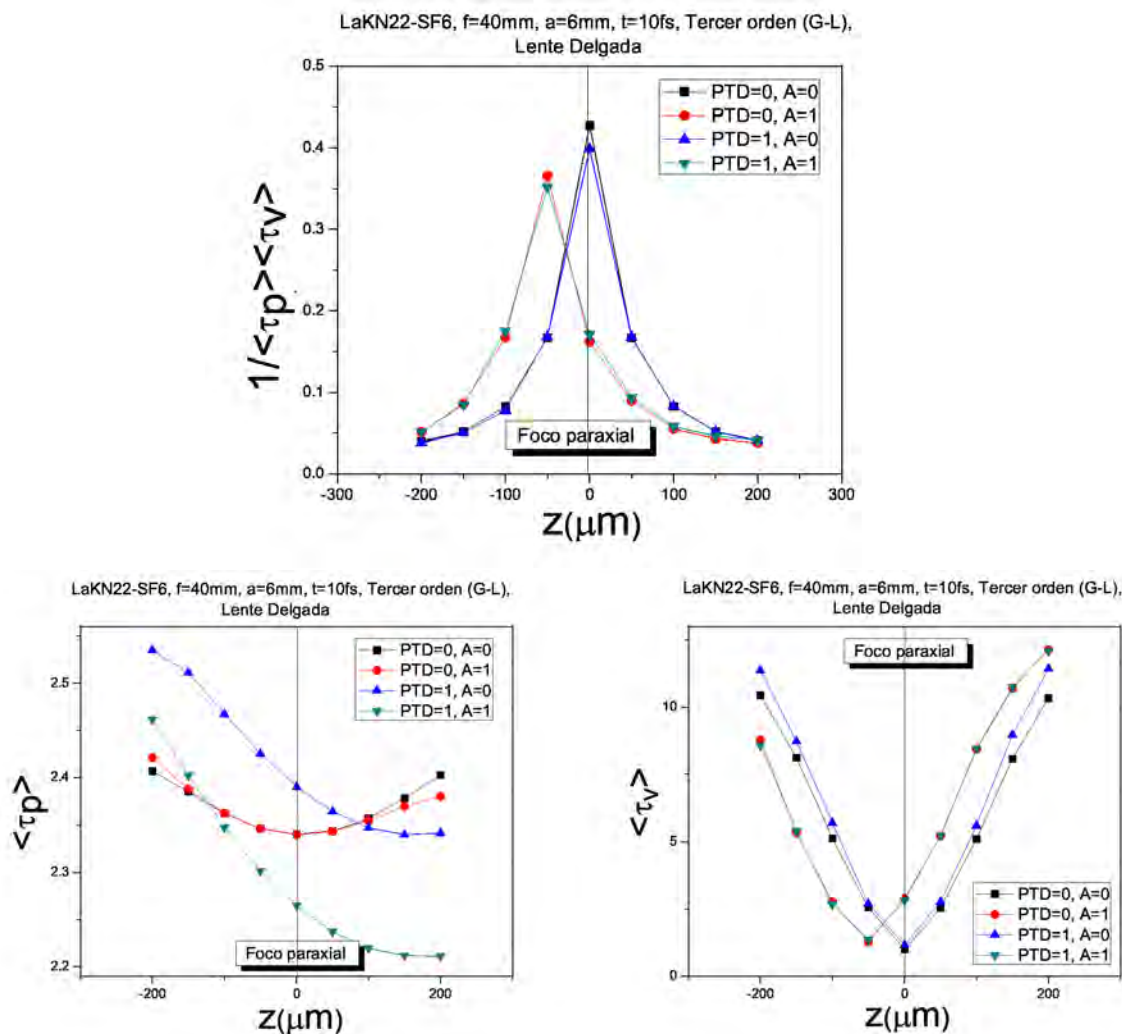


Figura 5.8: Calidad de señal y segundos momentos en tiempo y espacio, para pulsos con duración de 10fs. $A=1$, $PTD=1$ y $GVD=1$.

El valor máximo de la señal cuando se tiene el efecto de PTD, el efecto de GVD de tercer orden y la aberración esférica, para pulsos de 10fs, es de $S \approx 0.35$.

Finalmente estudiamos el efecto de GVD de tercer orden, en pulsos de duración de

20fs. En la siguiente gráfica se compara la calidad de la señal cuando se consideran todos los efectos (GVD=1, A=1, PTD=1) y cuando ninguno de ellos se considera.

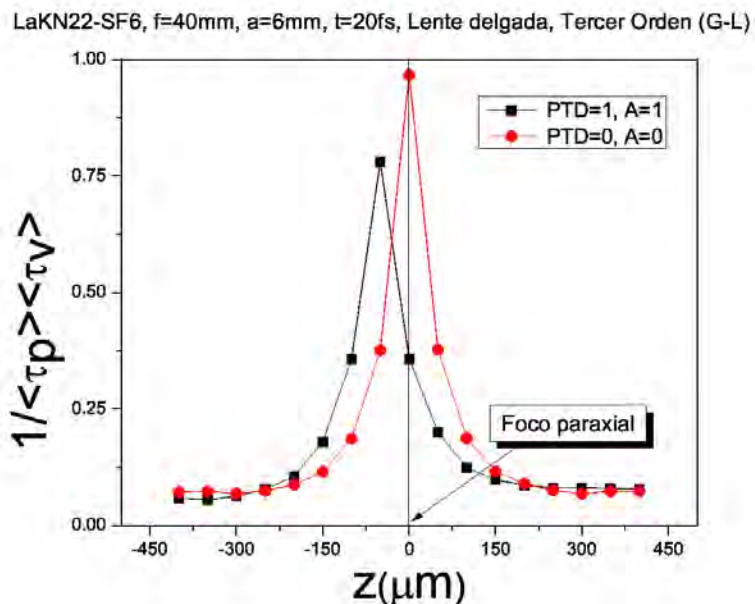


Figura 5.9: Se muestra la calidad de señal contra distancia de desenfoque. Se muestra la intensidad comparando el caso donde PTD=0 y A=0 respecto al caso PTD=1, A=1. En este último caso observamos que el máximo no se encuentra en la posición focal paraxial, sino a 50 micras hacia la lente. Para un pulso con duración de $t = 20\text{fs}$ y $\lambda = 810\text{nm}$.

El valor máximo de la señal cuando se tiene el efecto de PTD, el efecto de GVD de tercer orden y la aberración esférica, para pulsos de 20fs, es de $S \approx 0.79$. La calidad de la señal, cuando no se tiene ninguno de estos efectos es igual a 1, por lo que hay una disminución de más del 20 %, en este caso.

Los resultados de este capítulo muestran como la calidad de la señal, es gradualmente disminuida al disminuir la duración del pulso. Aunque se utilizará el sistema de par de prismas para corregir el efecto de GVD de segundo orden, la calidad de la señal toma valores menores al 20 % del valor máximo para pulsos con duración de 20fs. En busca de mejorar la calidad de la señal, en el siguiente capítulo se estudian dobletes apocromáticos, en los cuales se hace la corrección del remanente de color existente en los dobletes acromáticos.

Análisis de dobletes apocromáticos

En este capítulo se estudia la calidad de la señal para varios dobletes apocromáticos diseñados por la Dra. Martha Rosete, en la región IR (750nm, 1100nm). Todos los dobletes tienen una distancia focal de 40mm y semidiámetro de 6mm.

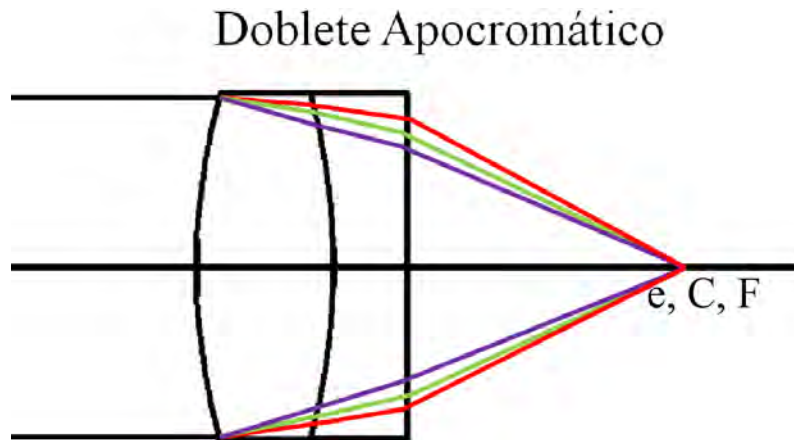


Figura 6.1: Doblete Apocromático

Los dobletes acromáticos tienen un remanente de color, por lo que la aberración cromática longitudinal no es estrictamente cero. Para corregir este remanente de color, se deben emplear dobletes apocromáticos. Un doblete apocromático tiene la característica de tener un foco común para las longitudes de onda C y F , al igual que el doblete acromático, pero además para la longitud de onda e . Las ecuaciones que se mencionaron en el capítulo 4, (4.1) y (4.8) son las ecuaciones que debe satisfacer un doblete acromático de potencia $K_{(d)}$, donde:

$$K_{(d)} = K_{(d)1} + K_{(d)2} \quad (6.1)$$

y para que las longitudes de onda C y F tengan un foco común, el cambio en la potencia

debe ser igual a cero, por lo que

$$\delta K_{(C-F)} = K_{(d)1}\bar{v}_{(C-F)1} + K_{(d)2}\bar{v}_{(C-F)2} = 0 \quad (6.2)$$

Del capítulo 5 sabemos que el número de Abbe, que está indicado por V es:

$$V_{(C-F)} = \frac{n_d - 1}{n_C - n_F} = \frac{1}{\bar{v}_{(C-F)}} \quad (6.3)$$

y \bar{v} recibe el nombre del poder dispersivo del vidrio. También al número de Abbe se le conoce como el poder de dispersión recíproca del vidrio. Con ello podemos escribir (6.2) de la forma

$$\frac{K_{(d)1}}{V_{(C-F)1}} + \frac{K_{(d)2}}{V_{(C-F)2}} = 0 \quad (6.4)$$

Resolviendo las ecuaciones (6.1) y (6.2) simultáneamente, se obtiene

$$K_{(d)1} = \frac{K_{(d)}}{1 - (1/\varepsilon)}; \quad K_{(d)2} = \frac{K_{(d)}}{1 - \varepsilon} \quad (6.5)$$

donde

$$\varepsilon = \frac{\bar{v}_{(C-F)2}}{\bar{v}_{(C-F)1}} \quad (6.6)$$

De las ecuaciones (6.5) y (6.6) podemos ver que si el poder dispersivo del vidrio de las componentes positivas y negativas llegan a ser muy cercanas, i.e., ε se aproxima a la unidad, entonces la potencia individual de las lentes se incrementa. Un incremento en la potencia individual producirá un incremento en las aberraciones monocromáticas del doblete. Por esta razón, es deseable mantener el poder de dispersión de las componentes individuales tan diferentes como sea posible.

Para corregir el espectro secundario necesitamos llevar una tercer longitud de onda, e , al foco paraxial de C y F , tal que además de las ecuaciones (6.1) y (6.2) otra ecuación debe satisfacerse:

$$\delta K_{(C-e)} = K_{(d)1}\bar{v}_{(C-e)1} + K_{(d)2}\bar{v}_{(C-e)2} = 0 \quad (6.7)$$

Para satisfacer las ecuaciones (6.2) y (6.7) simultáneamente es necesario que

$$\varepsilon = \frac{\bar{v}_{(C-F)2}}{\bar{v}_{(C-F)1}} = \frac{\bar{v}_{(C-e)2}}{\bar{v}_{(C-e)1}} \quad (6.8)$$

o

$$\frac{\bar{v}_{(C-F)2}}{\bar{v}_{(C-e)2}} = \frac{\bar{v}_{(C-F)1}}{\bar{v}_{(C-e)1}} \quad (6.9)$$

La razón $\bar{v}_{(C-F)}/\bar{v}_{(C-e)}$ es conocido como la dispersión parcial relativa del vidrio, P .

$$P = \frac{\bar{v}_{(C-F)}}{\bar{v}_{(C-e)}} \quad (6.10)$$

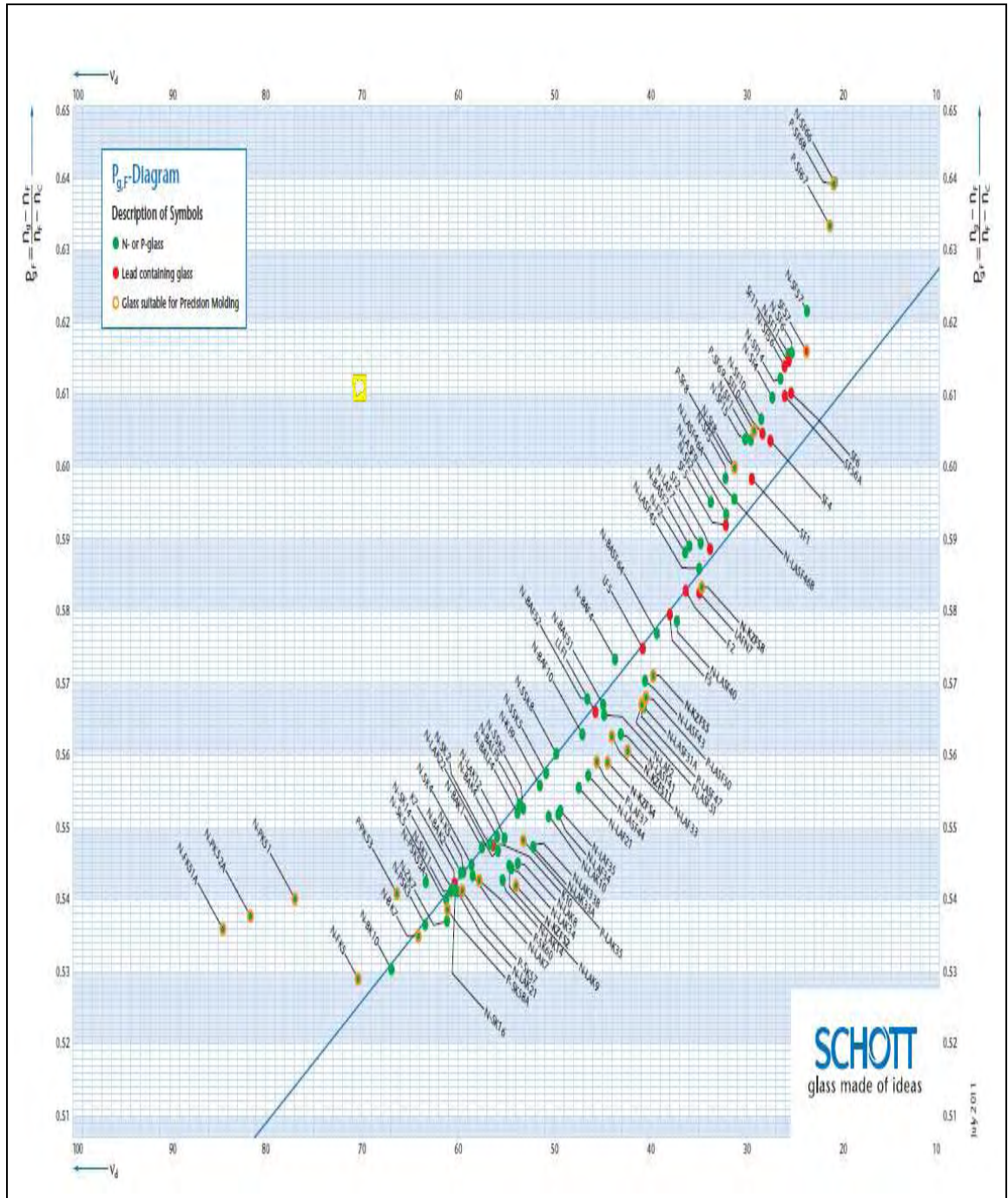


Figura 6.2: Lista de vidrios, catálogo de Schott.

Por lo tanto, podemos concluir que para traer las tres longitudes de onda a un foco paraxial común necesitamos elegir dos vidrios con la misma dispersión parcial relativa.

$$P_1 = P_2 \tag{6.11}$$

Pero también es necesario, elegir un par de vidrios con un poder dispersivo diferente, tan diferente como sea posible para reducir las aberraciones monocromáticas.

Cuando se grafica la dispersión parcial relativa *versus* el inverso de la potencia de dispersión, i.e., P *versus* V , se obtiene una relación lineal para la mayoría de los vidrios ópticos [98]. A los vidrios que caen "cerca" de la línea mostrada en la figura (6.2) se les llama vidrios normales y anormales a los vidrios que se encuentran "alejados" de ella. Como podemos ver en la figura (6.2) prácticamente todos los vidrios se comportan como normales en la región espectral donde P y V han sido evaluados y que corresponde al rango entre las líneas C (656.3nm) y F(486.1nm). Por lo tanto, practicamente no hay pares de vidrios normales que satisfagan tales condiciones, i.e., la corrección de la aberración cromática longitudinal, la corrección del espectro secundario y mantener la curvatura de las superficies suave para reducir las aberraciones de orden superior en una lente delgada.

A finales del año 1880, Abbe introdujo un vidrio de fluorita en las lentes de un microscopio y se encontró que el espectro secundario fue reducido en un porcentaje muy alto. Fue Abbe, quien le dio el nombre de corrección apocromática a la corrección del espectro secundario.

Los dobletes apocromáticos que estudiaremos, fueron diseñados en la región infrarroja, en el mismo rango espectral que los dobletes acromáticos de los capítulos 4 y 5. De tal forma que la luz enfocada por estos dobletes para las longitudes de onda 750nm, 810nm y 1100nm, convergen en el foco paraxial del doblete.

Las características físicas de los dobletes apocromáticos que se estudian en este capítulo, se muestran en la siguiente tabla. C indica la curvatura de cada una de las superficies de las lentes. El espesor de cada lente esta determinado por el valor de d_1 y d_2 . Al final de la lista se agregó las características del doblete acromático de distancia focal 40mm estudiado en el capítulo 5, estos datos se han obtenido del catálogo de Edmund.

Dobletes diseñados en el IR ($\lambda_0 = 810\text{nm}$), $f=40\text{mm}$, $a=6\text{mm}$					
Doblete	$C_1(\text{mm})$	$C_2(\text{mm})$	$C_3(\text{mm})$	$d_1(\text{mm})$	$d_2(\text{mm})$
CaF2-BaLF4 (apo)	19.3747	-15.1623	-44.8017	6.0	3.0
FK51-K10 (apo)	23.9097	-8.3690	-70.1953	6.0	3.0
FK51-KzFSN2 (apo)	16.9444	-13.6914	-437.9819	4.5	2.5
FK51-KzFSN2* (apo)	16.1429	-13.3720	2115.0165	4.5	2.5
FK51-KzFSN2** (apo)	16.4450	-15.3211	-4044.73	4.5	2.5
LaK22-SF6 (acrom)	22.8100	-21.9100	-250.4900	4.5	2.5

Figura 6.3: C_n indica la curvatura de la superficie n , d_n indica el grosor de la lente.

A continuación se muestra la calidad de la señal para un pulso de duración $T_{int} = 4.5\text{fs}$ que se ha propagado por el doblete apocromático CaF2-BaLF4. También se muestran los datos obtenidos de los segundos momentos en tiempo y espacio.

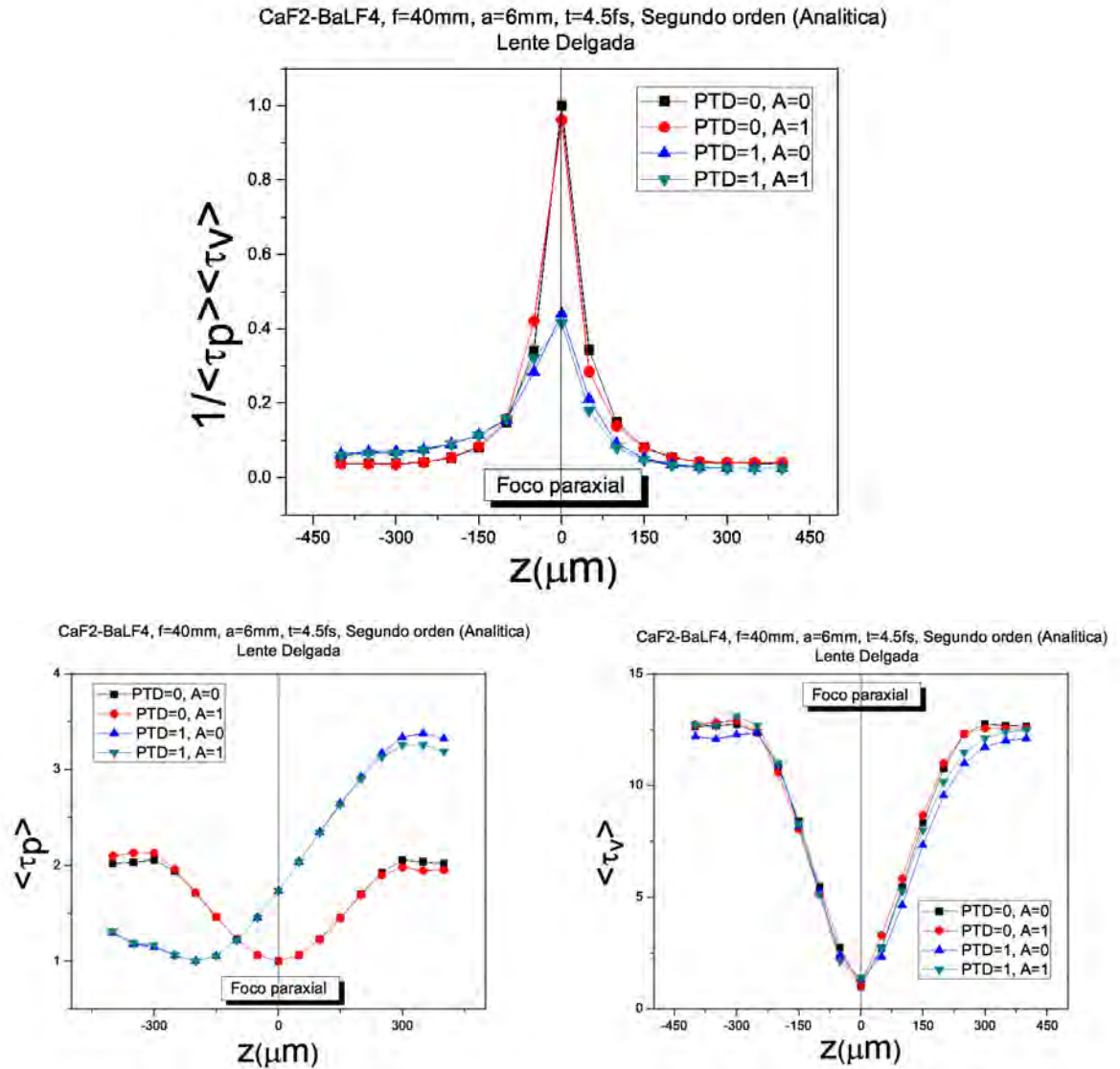


Figura 6.4: Se muestra la calidad de la señal y los anchos espacial y temporal para un doblete apocromático con una duración $t=4.5\text{fs}$, analizadas hasta el segundo orden en la expansión del número de onda.

A continuación se muestra la calidad de la señal para un pulso de duración $T_{int} = 4.5\text{fs}$ que se ha propagado por el doblete apocromático FK51-K10. También se muestran los datos obtenidos de los segundos momentos en espacio y tiempo. Se ha tomado la expansión del número de onda hasta el segundo orden y se han considerado diferentes casos de aberración esférica y cromática.

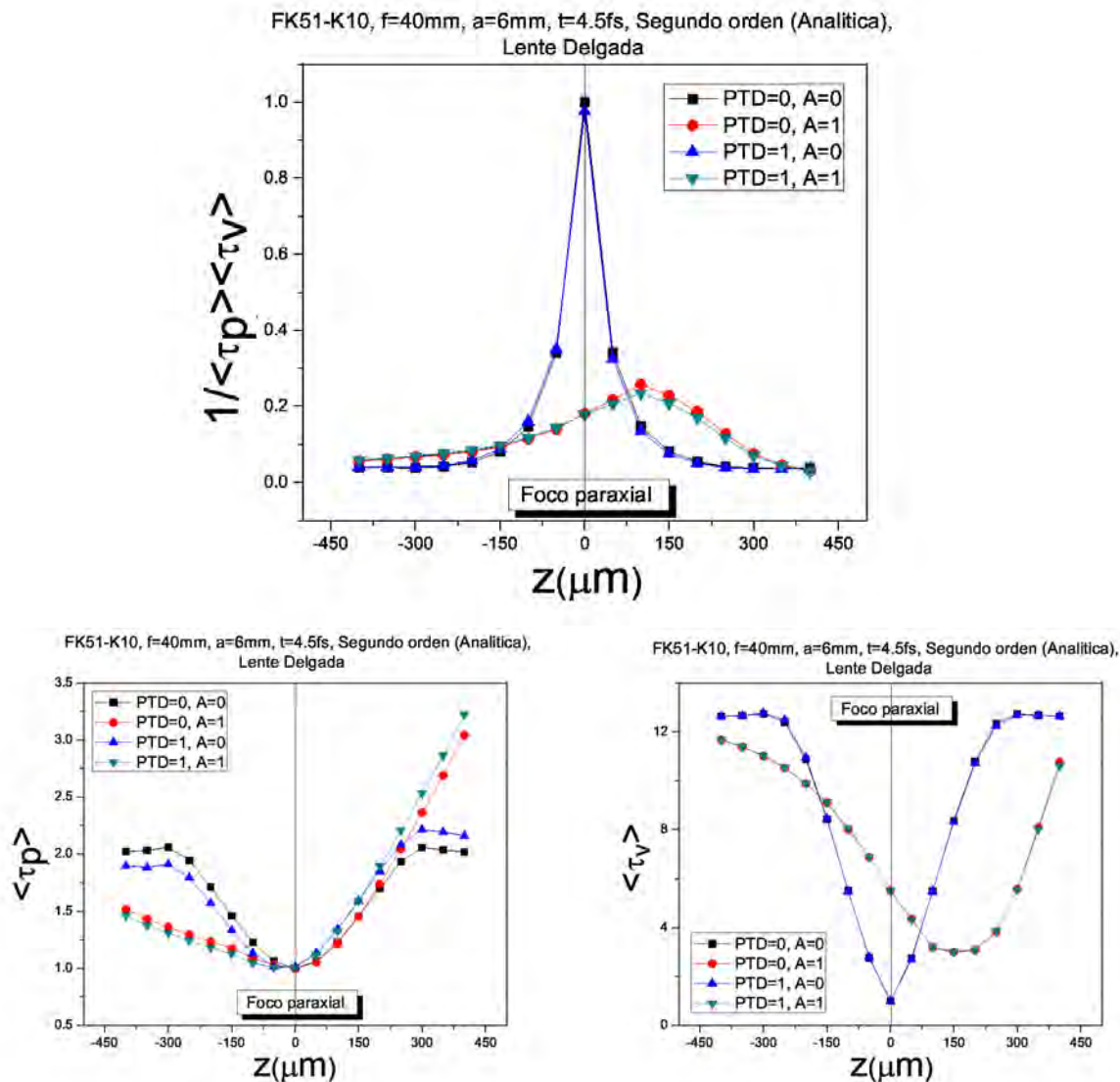


Figura 6.5: Calidad de señal y segundos momentos en tiempo y espacio, para un pulso de 4.5fs que se ha propagado por el dobletes apocromático FK51-K10.

A continuación se presenta la calidad de la señal para el doblete apocromático FK51-KzFSN2, desenfocado cada 50 micras sobre el eje óptico. Los resultados se han obtenido al expandir el número de onda hasta el segundo orden. Cada curva presenta efectos diferentes, cuando se tiene $PTD=0$ y $A=0$, se muestra la señal en función únicamente del desenfocamiento, en cambio cuando se considera la aberración esférica, indicado por $A=1$, o la aberración cromática indicada por $PTD=1$, además del desenfocamiento la señal es afectada por la aberración esférica y cromática.

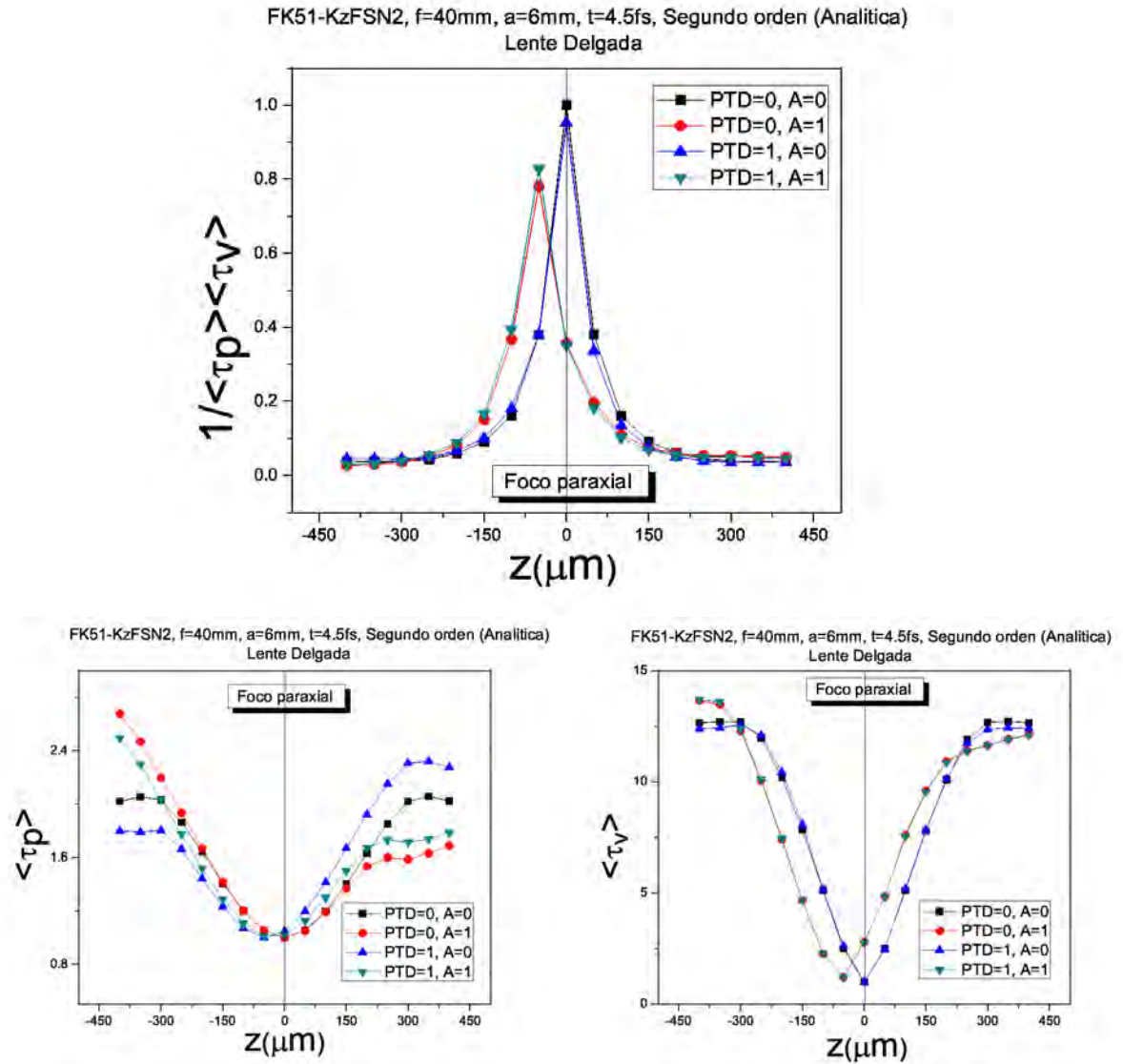


Figura 6.6: Calidad de la señal y los segundos momentos en tiempo y espacio, para un pulso que se ha propagado por el doblete con una duración de $T_{int} = 4,5\text{fs}$.

El análisis anterior, también se ha hecho para el mismo par de vidrios pero con diferentes curvaturas. La calidad de la señal se expone en las siguientes curvas.

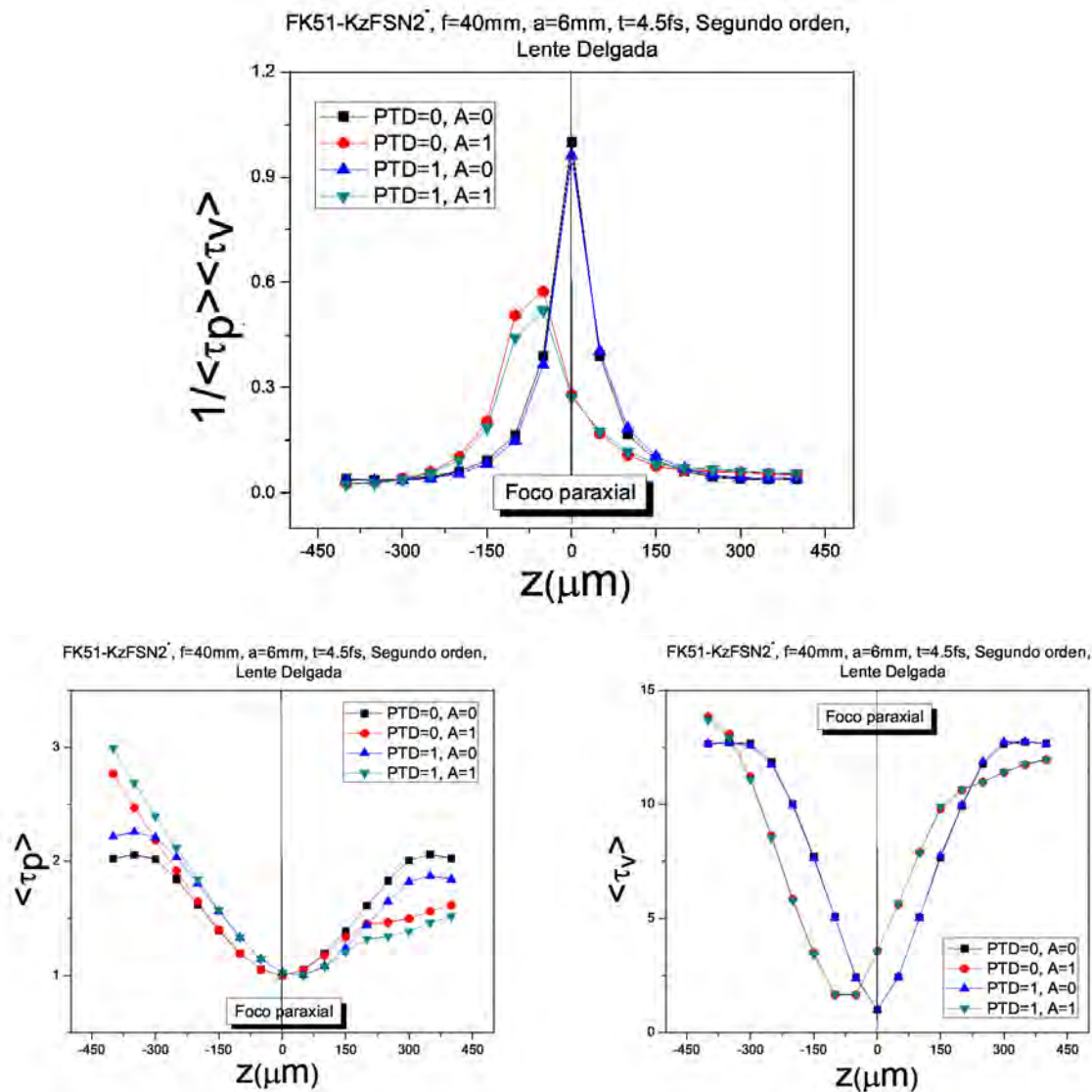


Figura 6.7: Se muestra la calidad de la señal y los anchos temporal y espacial, para un doblete apocromático con una duración $t=4.5\text{fs}$, analizadas hasta el segundo orden en la expansión del número de onda, para el doblete apocromático FK51-KzFSN2*.

Se han cambiado las curvaturas una vez más al doblete apocromático compuesto por los vidrios FK51-KzFSN2, en busca de una reducción de la aberración esférica, los datos obtenidos se muestran en las siguientes figuras.

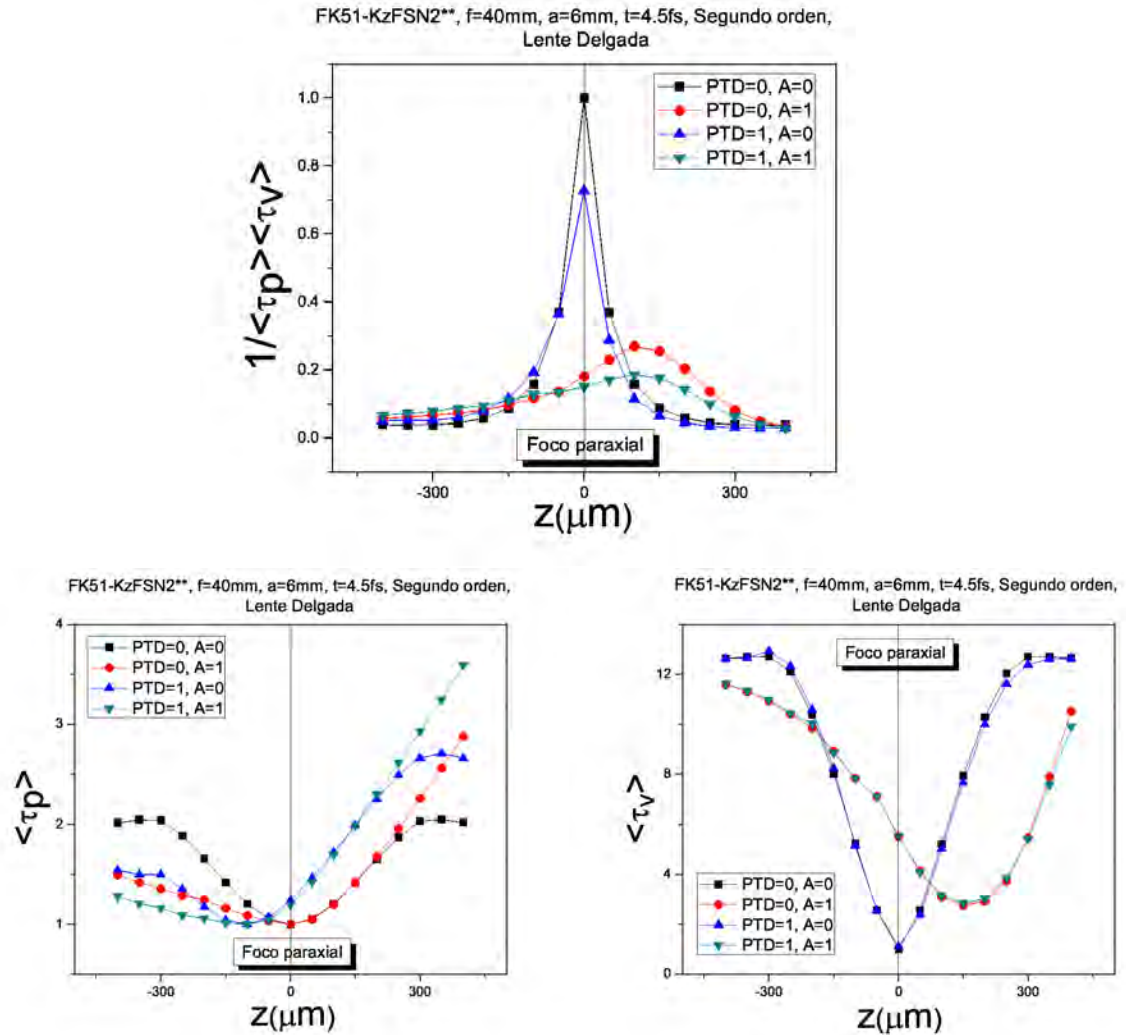
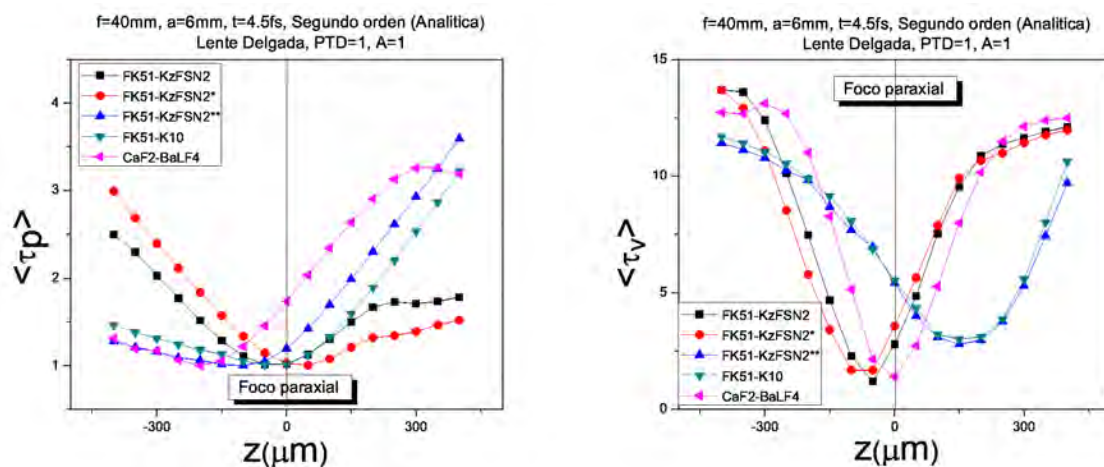


Figura 6.8: Se muestra la calidad de la señal y los anchos temporal y espacial, para un doblete apocromático con una duración $t=4.5\text{fs}$, analizadas hasta el segundo orden en la expansión del número de onda, para el doblete apocromático FK51-KzFSN2**.

Del análisis de las curvas de la señal para los últimos tres dobletes apocromáticos, se concluye que se obtendrá un máximo en la señal para los dobletes apocromáticos FK51-KzFSN2 y FK51-KzFSN2* a 50 micras hacia la lente, en cambio para el doblete apocromático FK51-KzFSN2** se obtendrá a 100 micras alejándose de la lente.

En la siguiente figura se comparan las señales de todos los dobletes apocromáticos estudiados. De los datos obtenidos se concluye que la señal máxima se obtendrá con el doblete apocromático FK51-KzFSN2. Los valores de la señal máxima se presentan en la siguiente tabla. Cada segundo momento, en tiempo y espacio, ha sido normalizado. El valor de $\langle \tau_p \rangle'$ se ha normalizado con la duración inicial del pulso T_{int} . El valor del ancho en espacio dado por el segundo momento $\langle \tau_v \rangle'$ se ha normalizado con el valor del ancho $\langle \tau_v \rangle_0$ del pulso que se ha propagado por una lente que no presenta aberración

esférica ni cromática, i.e., $A=0$ y $PTD=0$.



$T_{int}=4.5\text{fs}$, $a=6\text{mm}$, $\lambda = 810\text{nm}$, $GVD=0$, $PTD=1$, $A=1$				
Doblete	$z^*(\mu\text{m})$	$\langle \tau_p \rangle$	$\langle \tau_v \rangle$	$1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$
FK51-KzFSN2	$z_{fo} - 50$	1.0009	1.1958	0.8280
FK51-KzFSN2*	$z_{fo} - 50$	1.1451	1.6775	0.5205
FK51-KzFSN2**	$z_{fo} + 100$	1.6977	3.0693	0.1902
FK51-K10	$z_{fo} + 100$	1.3282	3.2125	0.2343
CaF2-BaLF4	z_{fo}	1.7347	1.3865	0.4157

Figura 6.9: Se muestran los valores para los anchos espaciales y temporales, para la posición z^* , donde el valor de $1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$ ha alcanzado el máximo. La posición del foco paraxial se ha representado por z_{fo} .

6.1. Comparación de la calidad de la señal de los dobletes LaK22-SF6 y FK51-KzFSN2

En base a estos resultados se ha comparado la calidad de la señal de el doblete apocromático FK51-KzFSN2 y el doblete acromático LaK22-SF6, de la misma apertura numérica 0.15, para un pulso de duración igual a $T_{int} = 4.5\text{fs}$.

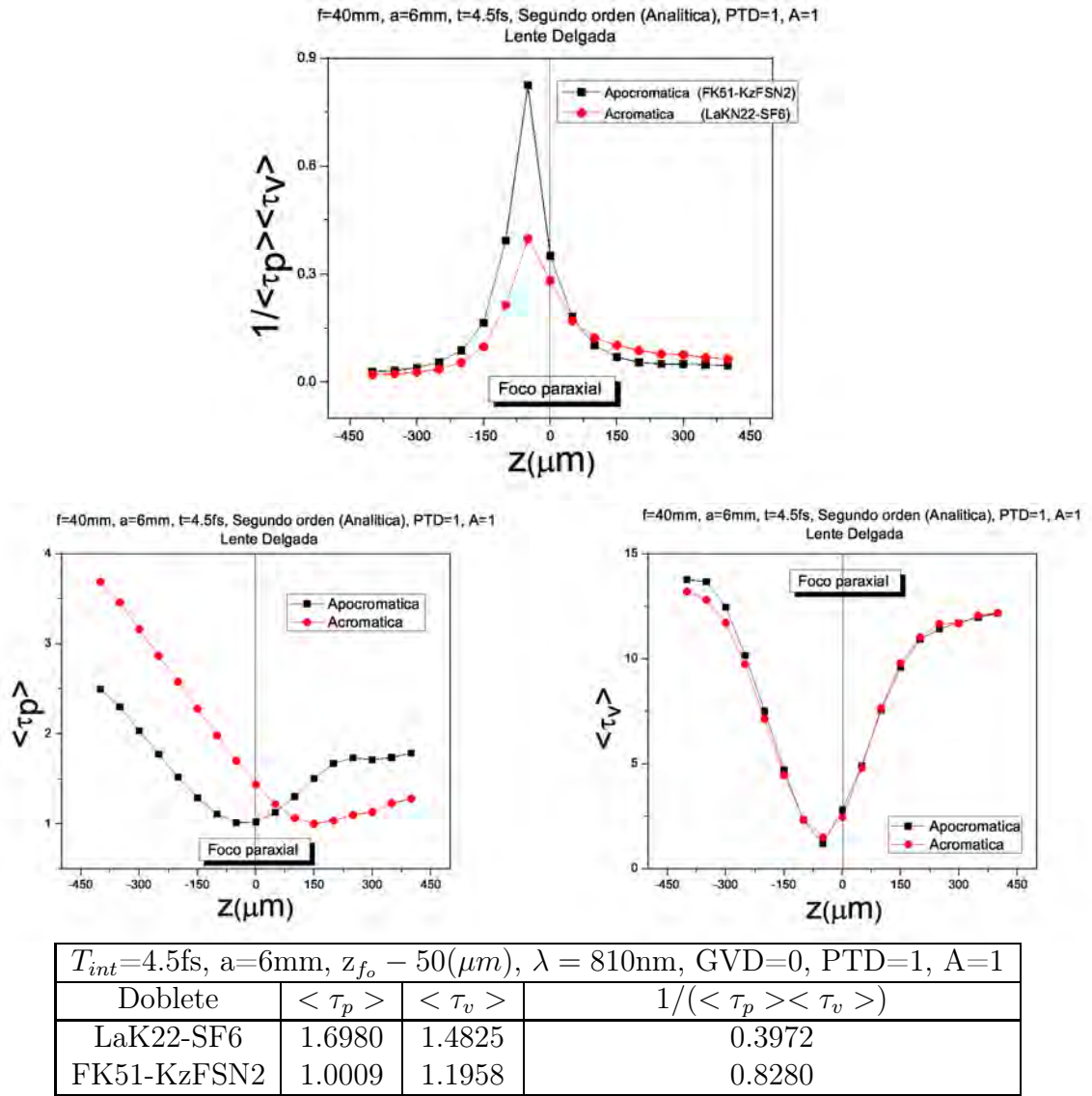


Figura 6.10: Se muestran los valores para los anchos temporales y espaciales, para la posición $z_{fo} = 50(\mu\text{m})$, donde el valor de $1/(\langle \tau_p \rangle \langle \tau_v \rangle)$ ha alcanzado el máximo. Analizadas hasta el segundo orden en la expansión del número de onda.

Los valores indicados en la tabla de la figura (6.10) muestran que la calidad de la señal

para el doblete apocromático es mayor al doble que la calidad obtenida con el doblete acromático. Estos resultados dejan claro que el camino para optimizar la intensidad en algún dispositivo, en el cual se necesite enfocar luz pulsada, los dobletes apocromáticos son la mejor opción para pulsos con duraciones menores a 20fs.

A continuación se presenta la calidad de la señal cuando se ha considerado el término de GVD de tercer orden ($GVD=1$), para el doblete acromático y apocromático, para pulsos de duración $T_{int}=4.5fs$. En la misma gráfica se aprecia la calidad de la señal para ambos dobletes cuando no se considera el término de GVD.

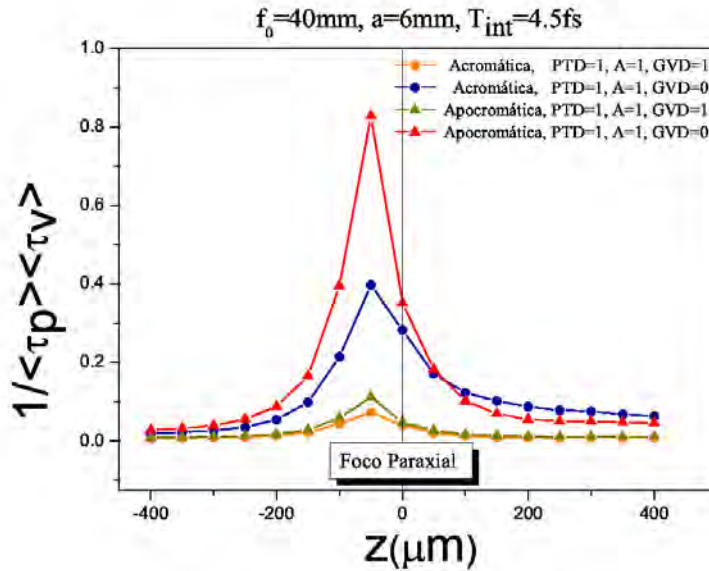


Figura 6.11: Calidad de la señal para los dobletes acromático (LaK22-SF6) y apocromático (FK51-KzFSN2), considerando el efecto de PTD y aberración esférica y diferentes condiciones de GVD, para pulsos con duración de 4.5fs.

Por los resultados mostrados en la figura (6.11), se puede observar que el efecto de GVD de tercer orden para pulsos con duración $T_{int} = 4.5fs$, disminuye la calidad de la señal en forma considerable. Si es que se desea aumentar la calidad de la señal es necesario usar un reconfigurador de pulsos como el MIIPS [24–27], en el cual se modula la fase del pulso anulando los efectos de GVD de todos los órdenes.

A continuación se presenta el mismo análisis de la gráfica (6.11), pero ahora considerando pulsos de duración $T_{int}=10fs$. Se presenta la calidad de la señal para el doblete acromático y apocromático considerando el efecto de aberración cromática y esférica, para el primer caso se toma el efecto de GVD de tercer orden y en el segundo caso no. De la gráfica (6.12) se concluye que el máximo de la señal se obtiene a 50 micras hacia la lente, medido a partir del foco paraxial. Cuando se ha corregido el efecto de GVD a todos los órdenes ($GVD=0$), la lente apocromática da una calidad de señal, proxima a 0.9, este valor es superior al alcanzado con el doblete acromático.

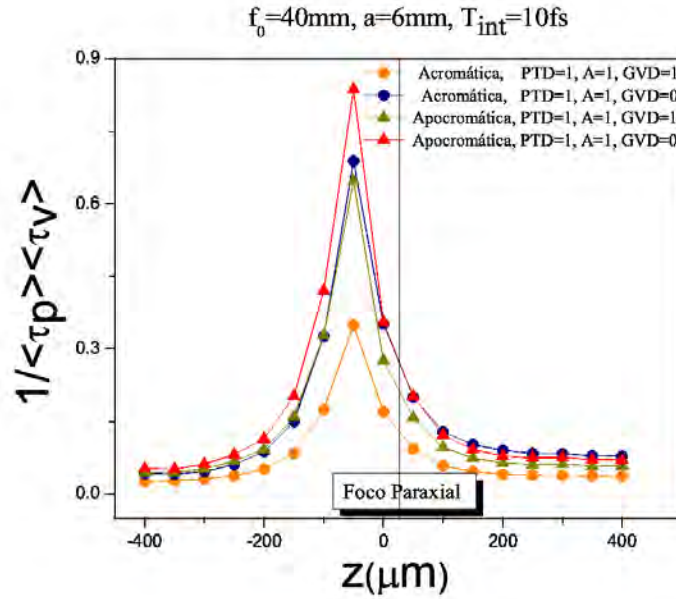


Figura 6.12: Calidad de la señal para los dobletes acromático (LaK22-SF6) y apocromático (FK51-KzFSN2), considerando el efecto de PTD y aberración esférica y diferentes condiciones de GVD para pulsos con duración de 10fs.

Las siguientes imágenes muestran la misma sección de hígado de ratón obtenidas con microscopía de dos fotones con ayuda de un láser pulsado de 10fs y un objetivo apocromático, por Dantus [25]. En la primera figura se observa la imagen obtenida cuando se ha corregido la dispersión de la velocidad de grupo hasta el segundo orden y la segunda figura cuando se ha corregido a todos los órdenes de GVD.

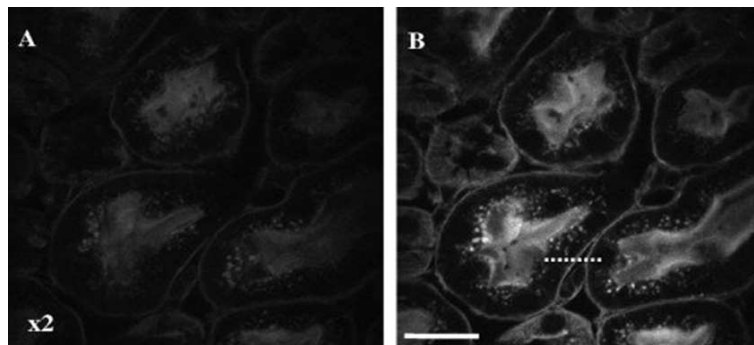


Figura 6.13: Imagen de la misma sección de tejido de ratón, obtenida compensado: (a) el segundo orden de GVD, (b) el segundo orden y ordenes superiores de GVD, usando un láser pulsado de 10fs, con una longitud de onda de la portadora $\lambda_0 = 800\text{nm}$, usando un objetivo apocromático. Marcos Dantus, et al. [25].

Son los resultados que se indican en la gráfica (6.14), los que se ven plasmados en la

figura (6.13), donde la calidad de la imagen se mejora, al corregir el efecto de GVD a ordenes superiores al segundo orden.

Por último, estudiamos la calidad de la señal de pulsos de 20fs enfocados por el doblete acromático y el doblete apocromático, sobre el eje óptico de cada sistema. La calidad de la señal se ve disminuida por el efecto de PTD y aberración esférica.

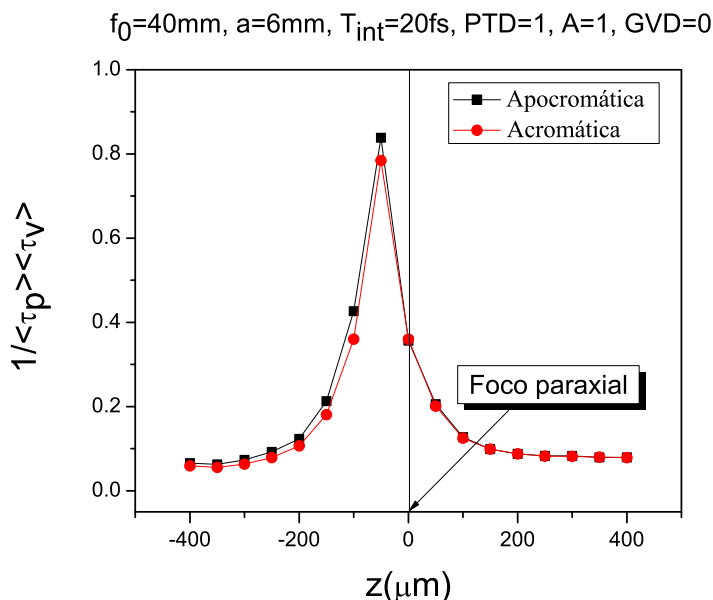


Figura 6.14: Comparación de la calidad de la señal obtenida con el doblete acromático (LaK22-SF6) y el doblete apocromático (FK51-KzFSN2), considerando el efecto de PTD y aberración esférica, para pulsos de 20fs. $\text{GVD}=0$.

La calidad de la señal se ha obtenido con los valores de los segundos momentos $\langle \tau_p \rangle$ y $\langle \tau_v \rangle$. El valor de $\langle \tau_v \rangle$ ha sido escalado por el valor de $\langle \tau_v \rangle_0$ igual a 4.3996×10^{-6} para el doblete acromático y 4.4207×10^{-6} para el doblete apocromático.

El valor máximo de la calidad de la señal, alcanzado por ambos dobletes se localiza a 50 micra hacia la lente. El valor máximo para el doblete acromático es 0.7846 y para el doblete apocromático es 0.8385, por lo que, para pulsos de esta duración la diferencia en la intensidad obtenida por los dobletes es pequeña.

Estudio de la difracción creada por el borde de la lente

En este capítulo estudiaremos como se ve afectado el pulso que se ha propagado por una lente, cuando el pulso se observa a una distancia grande respecto a la posición del foco paraxial $|z| \gg z_0$. Debido a la difracción en el borde de la lente y a la simetría circular de ésta, se origina un pulso secundario sobre el eje óptico, el cual puede llegar antes o después del pulso principal, según la distancia a la que se observe sea mayor o menor que la distancia focal paraxial respectivamente.

Suponiendo que una lente es iluminada de manera uniforme por un pulso de femtosegundos, donde el frente del pulso que incide en la lente es plano y el campo eléctrico del pulso, depende solamente del tiempo.

El campo en el plano A, puede describirse por la función [52]

$$h(t) = E_0 s(t) \exp(i\omega_0 t) \quad (7.1)$$

Donde $s(t)$ es la envolvente del pulso, ω_0 es la frecuencia de la onda portadora del pulso y E_0 es una constante. La duración temporal del pulso a la mitad del máximo en el perfil de intensidad esta dado por τ . La envolvente del pulso es diferente de cero sólo dentro del intervalo $(-m\tau, m\tau)$.

La transformada de Fourier de una función $g(\xi)$ se define como

$$G(\mu) = \mathcal{F}_\xi(g(\xi)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-i\mu\xi} d\xi \quad (7.2)$$

donde el subíndice ξ indica la variable de integración.

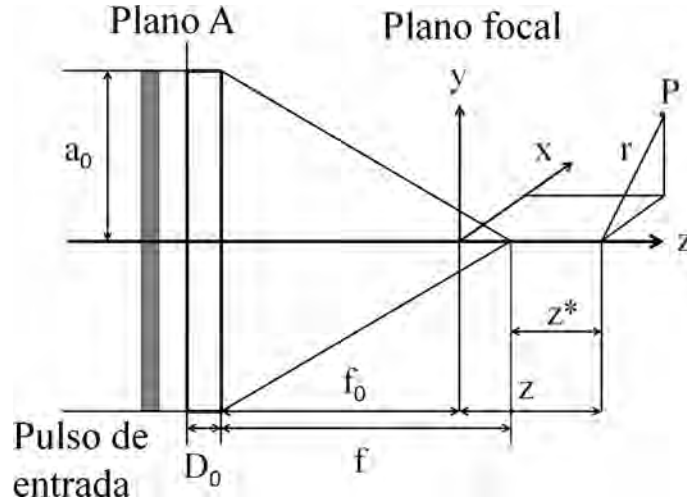


Figura 7.1: Esquema de la notación usada. z y r son las coordenadas cilíndricas del punto P , medidas desde el plano focal de la frecuencia central y el eje óptico respectivamente.

La transformada inversa de Fourier, esta definida por

$$g(\xi) = \mathcal{F}_\mu^{-1}(G(\mu)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mu) e^{i\mu\xi} d\mu \quad (7.3)$$

El campo eléctrico después de la lente, se puede expresar como:

$$\tilde{E}(z, r, t) = \frac{ia_0^2}{4\pi c} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega H(\omega)}{f(\omega)} e^{-iMD_0} \left(C(u, v) + iS(u, v) \right) e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} d\omega \quad (7.4)$$

Donde $H(\omega)$, es la transformada de Fourier de $h(t)$. $f(\omega)$ es la distancia focal que depende de la frecuencia, para una lente de radio a_0 y grosor D_0 .

$C(u, v)$ y $S(u, v)$ pueden calcularse usando las funciones de Lommel. u y v son las coordenadas adimensionales del punto P

$$u = \frac{\omega}{c} \left(\frac{a_0}{f} \right)^2 (z + f_0 - f), \quad v = \frac{\omega}{c} \frac{a_0}{f} r \quad (7.5)$$

El factor de fase ϕ_0 , esta determinado por $\phi_0 = 2\pi D_0 n'(\lambda_0)$, donde $n'(\lambda_0) = dn/d\lambda$ evaluado en λ_0 , n es el índice de refracción del material. El factor de fase es un término que no aparece en la intensidad, al multiplicar el campo por su conjugado. M representa las derivadas del segundo orden y mayores, de la serie de Taylor de $kn(\omega) = \omega n(\omega)/c$ alrededor de ω_0 . En el cálculo que se presenta se ha supuesto que M es igual a cero, por lo que todos los términos superiores al segundo orden de la dispersión han sido despreciados.

Sobre el eje óptico $r = 0$, teniendo $v = 0$, esto simplifica las expresiones de S y C

$$C(u, 0) = \frac{\sin(u/2)}{u/2} \quad S(u, 0) = \frac{1 - \cos(u/2)}{u/2} \quad (7.6)$$

Por lo que se puede expresar

$$i[C(u, 0) + iS(u, 0)] = i \left[\frac{\sin(u/2)}{u/2} + i \frac{1 - \cos(u/2)}{u/2} \right] = \frac{\exp(iu/2) - 1}{u/2} \quad (7.7)$$

El campo eléctrico sobre el eje óptico el campo eléctrico esta dado por:

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \tilde{E}(z, 0, t) \\ &= \frac{ia_0^2}{4\pi c} e^{-i\phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega H(\omega)}{f(\omega)} (C(u, 0) + iS(u, 0)) e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} d\omega \\ &= \frac{a_0^2}{4\pi c} e^{-i\phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega H(\omega)}{f(\omega)} \left(\frac{\exp(iu/2) - 1}{u/2} \right) e^{i\omega(t - \frac{z}{c})} d\omega \end{aligned} \quad (7.8)$$

tomando $\xi = t - \frac{z}{c}$, se puede escribir

$$\tilde{E}(z, 0, t) = \frac{a_0^2}{4\pi c} e^{-i\phi_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega H(\omega)}{f(\omega)} \left(\frac{\exp(iu/2) - 1}{u/2} \right) e^{i\omega\xi} d\omega \quad (7.9)$$

Expresado de esta forma, se puede relacionar con la transformada de Fourier inversa, dada por la expresión (7.3)

$$\begin{aligned} \tilde{E}(z, 0, t) &= \frac{a_0^2}{4\pi c} e^{-i\phi_0} 2\pi \mathcal{F}_\omega^{-1} \left(\frac{\omega H(\omega)}{f(\omega)} \frac{\exp(iu/2) - 1}{u/2} \right) \\ &= \frac{a_0^2}{2c} e^{-i\phi_0} \mathcal{F}_\omega^{-1} \left(\frac{\omega H(\omega)}{f(\omega)} \frac{\exp(iu/2) - 1}{u/2} \right) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Para una lente sin aberración cromática, cada una de las ondas monocromáticas que forman al pulso son enfocadas en el mismo punto, por lo que $f(\omega) = f_0$, con esto, la expresión del campo difractado se reduce

$$\tilde{E}(z, 0, t) = \frac{a_0^2}{2cf_0} e^{-i\phi_0} \mathcal{F}_\omega^{-1} \left(\omega H(\omega) \frac{\exp(iu/2) - 1}{u/2} \right) \quad (7.11)$$

Definimos T_a de la siguiente manera

$$T_a(z) = \left(\frac{a_0}{f_0} \right)^2 \frac{z}{2c} \quad (7.12)$$

y con ella se define la función

$$B_a(u) = \frac{e^{i\omega T_a} - 1}{i\omega T_a}$$

Con estas definiciones el campo puede reescribirse como

$$\tilde{E}(z, 0, t) = \frac{a_0^2}{2cf_0} e^{-i\phi_0} \mathcal{F}_\omega^{-1} \left(H(\omega) i\omega B_a(\omega) \right) \quad (7.13)$$

Usando la convolución de la transformada de Fourier de dos funciones [101],

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\omega^{-1}\left(H(\omega)i\omega B_a(\omega)\right) &= \mathcal{F}_\omega^{-1}(H(\omega)) \otimes \mathcal{F}_\omega^{-1}(i\omega B_a(\omega)) \\ &= h(\xi) \otimes \mathcal{F}_\omega^{-1}(i\omega B_a(\omega))\end{aligned}\quad (7.14)$$

Para calcular $b_a(\xi)$, la transformada de Fourier inversa de $i\omega B_a(\mu)$, resolvemos la siguiente ecuación:

$$\mathcal{F}_\omega^{-1}(i\omega B_a(\omega)) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega B_a e^{i\omega\xi} d\omega \quad (7.15)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} i\omega \left(\frac{e^{i\omega T_a} - 1}{i\omega T_a} \right) e^{i\omega\xi} d\omega \quad (7.16)$$

$$= \frac{1}{2\pi T_a} \int_{-\infty}^{\infty} (e^{i\omega T_a} - e^{i\omega\xi}) d\omega \quad (7.17)$$

$$= \frac{\delta(T_a + \xi) - \delta(\xi)}{T_a} \quad (7.18)$$

A partir de este resultado se considera el caso cuando $z \neq 0$ y cuando $z = 0$, de ello se obtiene

$$\mathcal{F}_\omega^{-1}(i\omega B_a(\omega)) = \begin{cases} \frac{\delta(\xi+T_a)-\delta(\xi)}{T_a} & \text{para } T_a \neq 0 \quad (z \neq 0) \\ \delta'(\xi) & \text{para } T_a = 0 \quad (z = 0) \end{cases} \quad (7.19)$$

De este resultado la convolución de las funciones $h(\xi)$ y $b_a(\xi)$, esta determinada por:

$$h(\xi) \otimes \mathcal{F}_\omega^{-1}(i\omega B_a(\omega)) = \begin{cases} \frac{h(\xi+T_a)-h(\xi)}{T_a} & \text{para } T_a \neq 0 \quad (z \neq 0) \\ h'(\xi) & \text{para } T_a = 0 \quad (z = 0) \end{cases} \quad (7.20)$$

Sustituyendo en la ecuación 7.14, el campo difractado esta dado por la ecuación

$$\tilde{E}(z, 0, t) = \begin{cases} \frac{a_0^2}{2cf_0 T_a} e^{-i\phi_0} (h(\xi + T_a) - h(\xi)) & \text{para } T_a \neq 0 \quad (z \neq 0) \\ \frac{a_0^2}{2cf_0} e^{-i\phi_0} h'(\xi) & \text{para } T_a = 0 \quad (z = 0) \end{cases} \quad (7.21)$$

sustituyendo el valor de ξ , podemos expresar al campo difractado por la lente de la forma:

$$\tilde{E}(z, 0, t) = \begin{cases} \frac{f_0}{z} e^{-i\phi_0} \left(h\left(t - \frac{z}{c} + T_a\right) - h\left(t - \frac{z}{c}\right) \right) & \text{para } T_a \neq 0 \quad (z \neq 0) \\ \frac{a_0^2}{2cf_0} e^{-i\phi_0} h'(t) & \text{para } T_a = 0 \quad (z = 0) \end{cases} \quad (7.22)$$

El desarrollo expuesto de la convolución de las funciones $H(\omega)$ y $B(\omega)$ en este capítulo, es más sencillo que el que se puede leer en el trabajo de Bor, [52]. Esta última ecuación indica que para $z = 0$, el campo difractado es igual a la derivada temporal del pulso de entrada. Para puntos donde $|T_a| \gg \tau$, indica que estamos alejados del punto focal

paraxial, donde dos pulsos aparecen con una diferencia de tiempo $T_a(z)$, lo que se puede apreciar en la figura (7.2). El pulso predicho por la óptica geométrica, es llamado el pulso principal, el otro pulso creado por la difracción en el borde de la lente, se define como el pulso secundario o boundary wave pulse y llega después que el pulso principal si $z < 0$, frente al punto focal paraxial y precede al pulso principal si $z > 0$, ubicando su posición detrás del punto focal paraxial, [52].

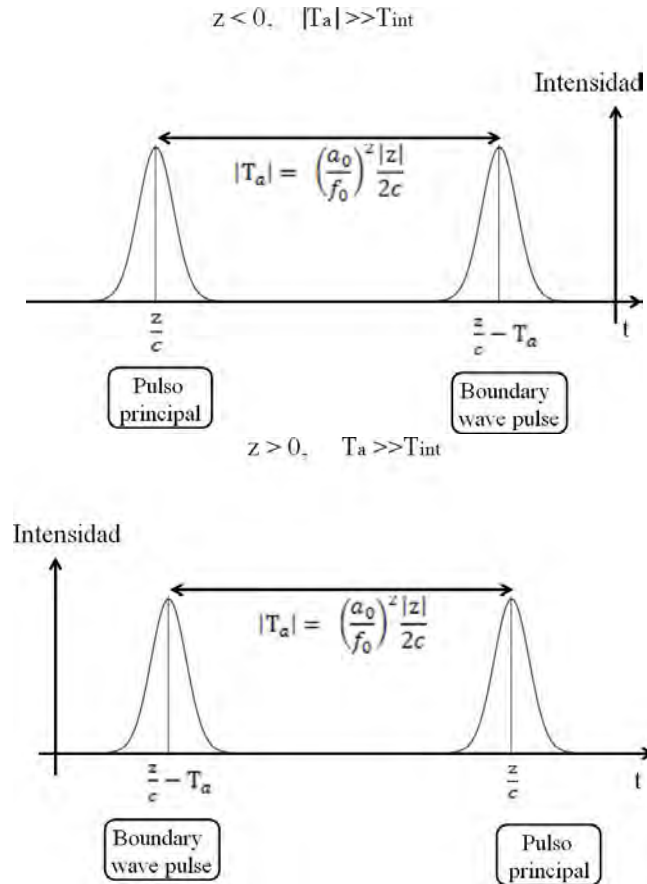


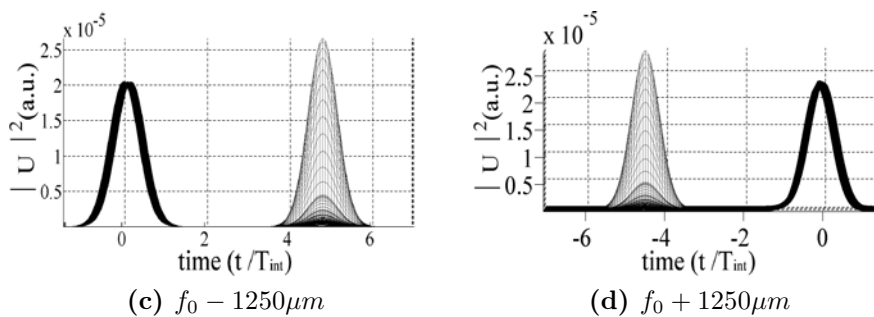
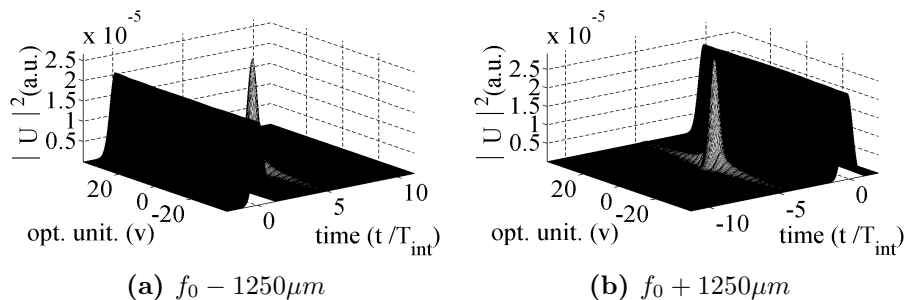
Figura 7.2: Se muestra el pulso principal y el creado por la difracción en el borde de la lente, para cuando la distancia $z < 0$ y $z > 0$. El resultado T_a se obtiene considerando $PTD=0$, $A=0$, $GVD=0$.

Se ha comprobado la existencia del pulso secundario, a través de mediciones experimentales del espectro y la distribución de la intensidad radial de un pulso de femtosegundos a través de una apertura circular, para cuando el tiempo de separación de los pulsos es suficientemente grande comparado con la duración de los pulsos, predicho teóricamente y medido experimentalmente por Horváth, et. al. [105–107]. El experimento descrito en [105], se ha realizado con un láser de Ti:Zaf, con pulsos de duración de 20fs, con una longitud de onda de la portadora de 800nm y un ancho de banda asociado de 55nm, enfocando al pulso con una lente de distancia focal de 25mm.

A continuación se muestra el pulso que se ha propagado por un doblete acromático

(LaK22-SF6) de semidiámetro igual a 6mm y distancia focal de 40mm, bajo condiciones ideales, i.e. $A=0$, $PTD=0$ y $GVD=0$. También se observa

Considerando $A=0$, $PTD=0$, $GVD=0$



Considerando $A=1$, $PTD=1$, $GVD=1$

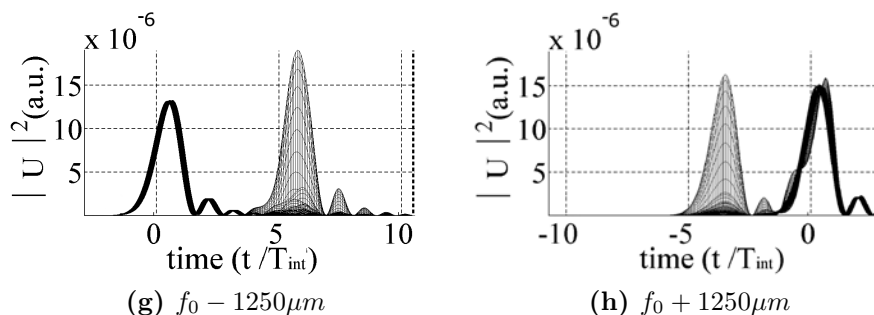
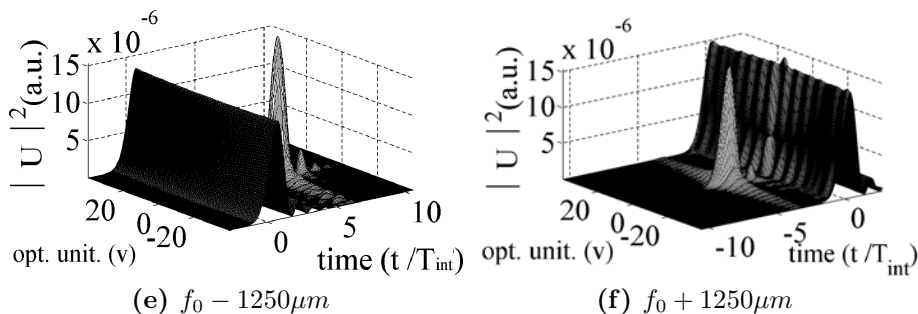


Figura 7.3: Distribución de la intensidad para pulsos alejados 1250 micras del foco paraxial. Se observa el pulso creado por la difracción en la orilla de la lente.

el pulso después de propagarse por el mismo doblete acromático, pero ahora considerando los efectos de aberración esférica, cromática y GVD de tercer orden, ($A=1$, $PTD=1$ y $GVD=1$), para dos posiciones de desenfocamiento, $z = -1250\mu m$ y $z = +1250\mu m$ medidas a partir del foco paraxial $z = 0\mu m$.

El pulso originado por la difracción en el borde de la lente, puede observarse en la figura (7.3). Midiendo directamente la separación de los máximos en la figura, hemos estimado que la separación temporal entre los pulsos es de 47fs, por otra parte, calculamos T_a en base a la ecuación (7.12), donde Horváth et.al. [52], predicen la existencia del pulso secundario y se obtuvo $T_a = 46.85fs$. Se observa que la distorsión en el pulso provocado por el efecto de dispersión de tercer orden modifica tanto en el pulso principal como al generado en el borde de la lente.

Con estos resultados, hemos verificado la presencia del pulso secundario, en la posición indicada por Bor et.al., [52]. A pesar de considerar los efectos de aberración esférica, cromática y GVD de tercer orden, la posición del pulso secundario es practicamente la misma que cuando no se considera ninguno de estos efectos.

En el caso que se considere la aberración cromática de la lente ($PTD=1$), la expresión que determina la distancia temporal entre el pulso principal y el boundary wave pulse, es diferente. Para una lente acromática el calculo exacto de la transformada inversa de Fourier en la ecuación (7.8) puede realizarse de una forma sencilla, pues u definida en la ecuación (7.5) esta descrita como una función lineal en las frecuencias ω . Ahora tomando una aproximación lineal de ω alrededor de ω_0 , se obtiene:

$$\frac{f(\omega)}{\omega} \frac{u}{2} = \frac{a_0^2 z + f_0 - f(\omega)}{2c f(\omega)} \approx -\frac{a_0^2 f'(\omega_0)}{2c f(\omega_0)} \Delta\omega \quad (7.23)$$

y

$$\frac{u}{2} \approx \Delta\omega T \quad (7.24)$$

se obtiene:

$$\frac{\omega}{f(\omega)} \frac{\exp(iu/2) - 1}{u/2} \approx -\frac{2cf(\omega)}{a_0^2 f'(\omega)} \frac{\exp(i\Delta\omega T) - 1}{\Delta\omega} \quad (7.25)$$

donde $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ y

$$T = T(z) = -\omega_0 f'(\omega_0) \frac{a_0^2}{2cf^2(\omega_0)} \quad (7.26)$$

Al sustituir la ecuación (7.25) en la ecuación (7.8), el campo eléctrico puede ser escrito de la forma:

$$E(z, t) = -i \frac{f(\omega_0)}{f'(\omega_0)} e^{-i\phi_0} \mathcal{F}_\omega^{-1} \left(H(\omega) \omega B(\Delta\omega) \right) \Big|_{\xi=t-z/c} \quad (7.27)$$

donde la función B esta dada por

$$B(\mu) = \frac{e^{i\mu T} - 1}{i\mu}$$

siguiendo el mismo desarrollo que se mostró anteriormente, se obtiene que el campo que ha sido enfocado por la lente, consta de dos pulsos separados por la distancia temporal T .

En la figura (7.4), se observa el pulso que ha sido enfocado por una lente de BK7, el resultado se ha obtenido con la solución analítica en las frecuencias, considerando únicamente el efecto de PTD (i.e., $PTD=1$, $A=0$, $GVD=0$), se analizó un pulso que ilumina de manera uniforme a una lente de diámetro igual a 10mm y distancia focal de 30mm, cuya duración es de $T_{int} = 7,2fs$ y una longitud de onda de la onda portadora igual a $\lambda_0 = 620nm$, de manera análoga al resultado mostrado por Bor, [52], en donde él considera un pulso de 6fs medidos con el criterio T_{FWHM} . Siendo la distancia focal de la lente 30mm, se muestra el pulso sobre el eje óptico a una distancia de $200\mu m$ hacia la lente, en la posición $z = 29,8mm$ medidos a partir de la lente. La figura que se muestra corresponde al mismo caso que la figura 6 del artículo de Horváth y Bor (1994) [52]. Midiendo directamente de la gráfica, sobre los máximos de los pulsos, se estima que la separación entre máximos es de aproximadamente 60fs. Tomando los valores $a_0 = 5mm$, $f=30mm$, $\omega_0=3.038PHz$ y $f'(\omega_0)=-0.429mm/PHz$, el tiempo estimado de T es igual a 60.32fs.

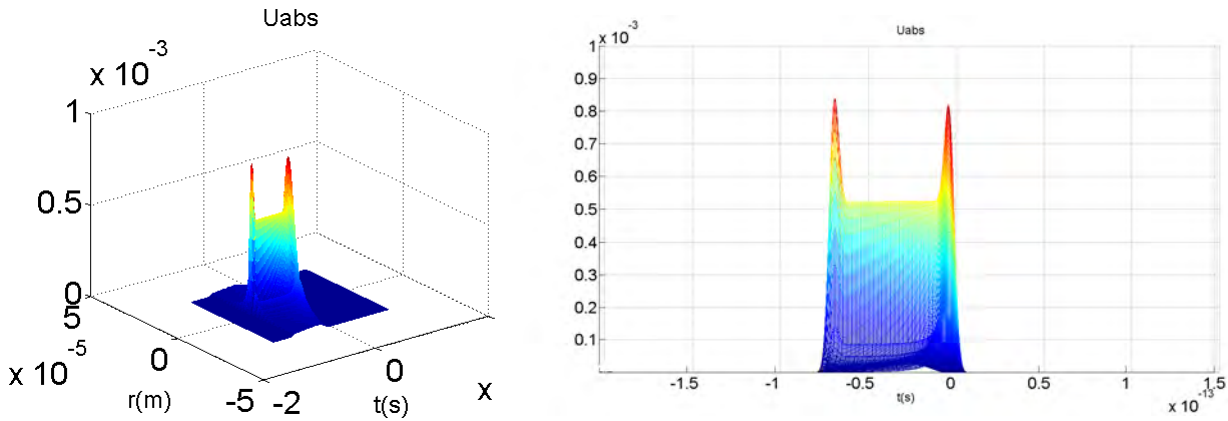


Figura 7.4: Se observa la distorsión de un pulso de $T_{int} = 7,2fs$ y $\lambda_0 = 620nm$, a una distancia de 200 micras del foco paraxial, debido a el pulso secundario.

El valor del segundo momento en tiempo $\langle \tau_p \rangle$ es igual a 7.7188, mientras que en espacio el valor del segundo momento $\langle \tau_v \rangle'$ es 2.4774×10^{-5} .

En la literatura se menciona que la velocidad con la que se propaga el pulso creado por la difracción en el borde de la lente, es un pulso que viaja a velocidades mayores a la velocidad de la luz, se menciona que este resultado no contradice la teoría de la relatividad general, pues el pulso es un fenómeno de la interferencia de la difracción creada en el borde y no es una señal real, [52]. Sin embargo, los mismos autores, siete años más tarde, miden la intensidad del boundary wave pulse, [106], sin mencionar alguna definición de señal que clarifique lo antes expuesto.

Análisis de la aproximación $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$

Dentro del análisis del campo difractado una vez que éste ha pasado por un sistema refractivo, se han realizado varias aproximaciones, una de ellas es que el ancho de frecuencias que genera el pulso, es mucho menor al valor de la frecuencia central del pulso, i.e., $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$. Esta es una aproximación realizada en todos los trabajos que incluyen una solución analítica [10, 15, 22, 59]. Sheppard [63, 64], menciona que el termino $\Delta\omega/\omega_0$, tiene una influencia importante en la formación de imágenes, en particular en las imágenes obtenidas por escaneo confocal, donde un láser de femtosegundos puede ser usado para resolver una imagen. En este capítulo estudiaremos como este término afecta la calidad de la señal para una lente simple de BK7, el doblete acromático LaK22-SF6 y el doblete apocromático FK51-KzFSN2, cada uno de ellos tiene una distancia focal de 40mm y un semidiámetro de 6mm. El análisis presentado se realiza para pulsos de 20fs y una longitud de onda de la portadora igual a 810nm. Se ha considerado el efecto de PTD y la aberración esférica del sistema.

El término $\Delta\omega/\omega_0$ se encuentra en tres términos de la integral que debemos resolver para encontrar el campo difractado en la región focal. Estos términos se pueden identificar en el desarrollo a segundo orden en la ecuación (A.37) del apéndice A, donde el campo esta descrito por la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned}
 U(r, u, v, z, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
 &\times e^{ik_0(n_1d_1+n_2d_2)+ik_0\Delta\omega(n_1d_1a_1^1+n_2d_2a_1^2)+ik_0(\Delta\omega)^2(n_1d_1a_2^1+n_2d_2a_2^2)} \\
 &\times e^{-ir^2\Delta\omega \left\{ \frac{k_0\rho^2}{2} \left(\frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_3} \right) + \frac{u}{2\omega_0} - \frac{k_0\rho^2}{2\omega_0} \right\}} \\
 &\times e^{-ik_0\frac{(\rho r)^2}{2} \left\{ (\Delta\omega)^2 \left(\frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_3} \right) \right\}} \\
 &\times e^{i(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0})\frac{v^2}{4N}} e^{-\frac{ir^2u}{2}} J_0\left(vr\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right) \tag{8.1}
 \end{aligned}$$

El primer término que incluye $\Delta\omega/\omega_0$, se encuentra en la aberración de la lente Θ , dentro de la expansión del número de onda (k_a)

$$\Theta(r) = k_a W(r) \quad (8.2)$$

Donde el número de onda en el aire, esta descrito por

$$k_a \equiv k_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \quad (8.3)$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación (8.2) y el valor de W definido en el capítulo 1, la aberración esta descrita por la expresión

$$\Theta(r) = -\frac{1}{8}k_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) (S_1 + S_2)r^4 \quad (8.4)$$

donde S_1 y S_2 son los coeficientes de Seidel, que estan definidos por las curvaturas de las lentes y el índice de refracción de las mismas. En caso de tener una lente simple, solo tenemos la contribución de uno de estos dos términos, en el programa de computo, el coeficiente de Seidel S_2 se iguala a cero.

El segundo término que incluye el término $\Delta\omega/\omega_0$, se encuentra relacionado con la función de Bessel J_0 , el cual esta expresado por la siguiente relación

$$J_0\left(vr \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right) \quad (8.5)$$

al tomar la aproximación $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$, el término que contribuye a la amplitud del campo es $J_0(vr)$. El último término, al que nombramos V , que incluye el término $\Delta\omega/\omega_0$, esta descrito por la siguiente exponencial

$$V = \exp \left[\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \left(\frac{v^2}{4N}\right) \right] \quad (8.6)$$

Para obtener el campo en el plano focal, se obtiene la transformada de Fourier del campo, una vez que ha viajado por la lente:

$$U(r, u, v, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) e^{-i(\Delta\omega)t} U(r, u, v, z, \Delta\omega) \quad (8.7)$$

Al considerar el término $\Delta\omega/\omega_0$, en la aberración esférica, el término de J_0 y V , cada uno de estos términos debe ser incluido dentro de la integral sobre las frecuencias, para encontrar el campo cerca de la región focal.

De tal forma que el campo del pulso que ha sido enfocado por un sistema refractivo, cerca de la región focal tomando el término $\Delta\omega/\omega_0$, esta expresado por la siguiente relación

$$\begin{aligned}
U(r, u, v, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) \int_0^1 r dr U_0(r) e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} \\
&\times e^{-i\Delta\omega(t - \tau' + r^2 \tau)} e^{-(\Delta\omega)^2 [\frac{T^2}{4} - i(\delta' - r^2 \delta)]} e^{-i(\frac{r^2 u}{2})} \\
&\times e^{i(\frac{v^2}{4N})(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0})} J_0\left(vr \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right)
\end{aligned} \tag{8.8}$$

Sustituyendo el término de la aberración Θ , finalmente se obtiene:

$$\begin{aligned}
U(r, u, v, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) \int_0^1 r dr U_0(r) e^{i\frac{1}{8}k_0(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0})(S_1 + S_2)r^4} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} \\
&\times e^{-i\Delta\omega(t - \tau' + r^2 \tau)} e^{-(\Delta\omega)^2 [\frac{T^2}{4} - i(\delta' - r^2 \delta)]} e^{-i(\frac{r^2 u}{2})} \\
&\times e^{i(\frac{v^2}{4N})(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0})} J_0\left(vr \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right)
\end{aligned} \tag{8.9}$$

Esta ecuación es análoga a la ecuación (A.42), que se encuentra en el apéndice A, sin embargo, en la ecuación (8.9), se han incluido los términos $\Delta\omega/\omega_0$ donde corresponden.

Los resultados expuestos han sido posibles gracias al método de integración de Gauss-Legendre. Aún con ayuda de este método, el tiempo de calculo computacional ha llegado a ser de 36 horas, este incremento se ha debido a la inclusión del término J_0 en la integral de las frecuencias.

En la figura (8.1), se muestra el perfil de intensidad de los pulsos con duración de $T_{int} = 20$ fs, vistos en el plano (t, v) . El primer renglón muestra el resultado considerando que el término $\Delta\omega/\omega_0$ es igual a cero, en el segundo renglón cuando es diferente de cero sólo en el término de V , en el tercer renglón cuando se ha tomado el término $\Delta\omega/\omega_0$ sólo en J_0 , después sólo en el número de onda que aparece en la aberración esférica Θ y finalmente cuando es diferente de cero para todos los términos en los que aparece, i.e., V , J_0 y Θ .

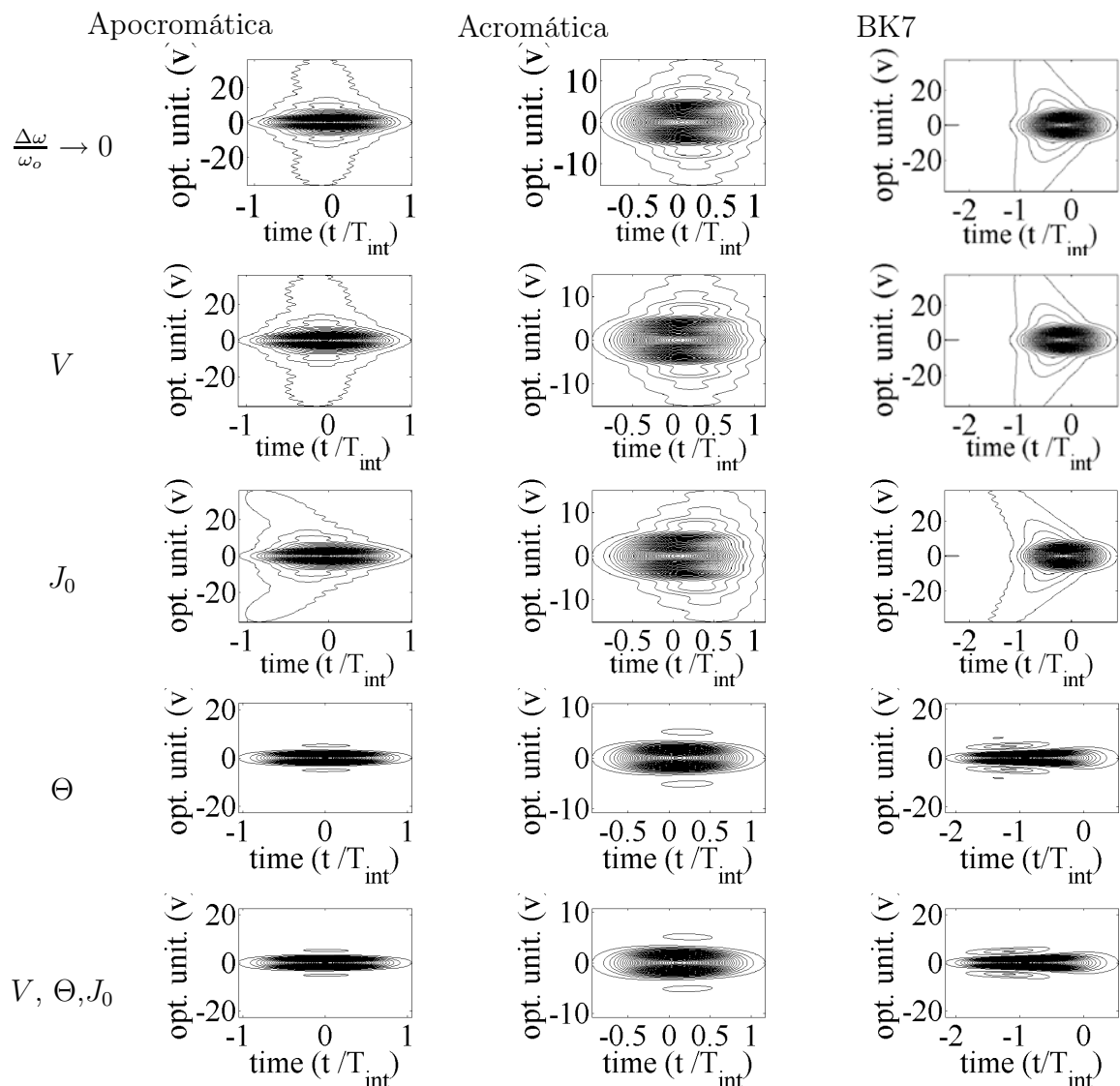


Figura 8.1: Vista superior del perfil de intensidad, para un pulso de duración $T_{int} = 20fs$, después de viajar por una lente refractiva.

En la figura (8.2), se observa el perfil de intensidad de pulsos de 20fs, que han sido enfocados por diferentes sistemas refractivos de apertura numérica 0.15mm.

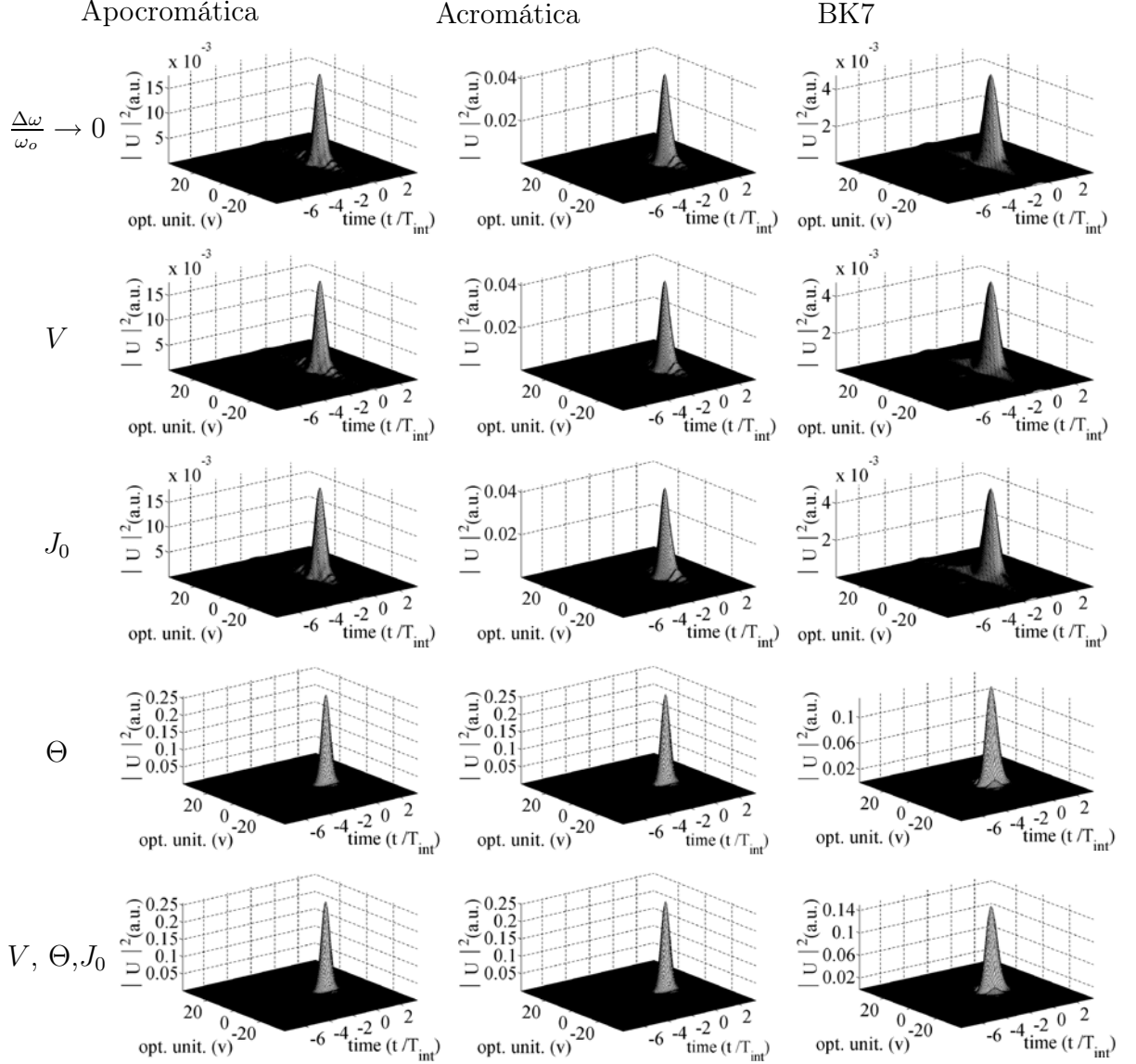


Figura 8.2: Perfil de intensidad para un pulso de duración $T_{int} = 20fs$, al ser enfocado por el sistema refractivo indicado.

Los datos que se muestran en la tabla (8.3), se han obtenido cuando la expansión del número de onda se realiza a segundo orden, i.e., $GVD=0$, se ha considerado la aberración esférica de la lente ($A=1$) y la aberración cromática ($PTD=1$). En el mismo orden en el que se presentaron las figuras, se muestran los datos cuando el término $\Delta\omega/\omega_0 = 0$, y después cuando se ha tomado el término $\Delta\omega/\omega_0$, en cada uno de los términos indicados.

Los segundos momentos en tiempo, se han normalizado con la duración del pulso, 20fs, en cada caso, se ha obtenido $\langle \tau_p \rangle = 1,0451$. Los segundos momentos en espacio se han normalizado respecto al segundo momento que se obtiene al no considerar el efecto de la aberración esférica de la lente, ni el efecto de PTD, pero considerando $\Delta\omega/\omega_0$ en

los términos de V y de J_0 . Para el doblete apocromático este valor es igual a $\langle \tau_v \rangle_0 = 4,3766 \times 10^{-6}$, para el doblete acromático $\langle \tau_v \rangle_0 = 4,4040 \times 10^{-6}$, y para la lente simple $\langle \tau_v \rangle_0 = 5,2540 \times 10^{-6}$.

$f = 40\text{mm}, a=6\text{mm}, \lambda = 810\text{nm}, \text{GVD}=0, \text{PTD}=1, A=1, z_f$			
$t=20\text{fs}$	Apocromático	Acromático	BK7
$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = 0$	$\langle \tau_p \rangle = 1,0108$ $\langle \tau_v \rangle = 5,5156$ $S = 0,1794$	$\langle \tau_p \rangle = 1,1026$ $\langle \tau_v \rangle = 2,6146$ $S = 0,3468$	$\langle \tau_p \rangle = 1,2761$ $\langle \tau_v \rangle = 4,7332$ $S = 0,1655$
$\Delta\omega/\omega_0 \neq 0$ en V	$\langle \tau_p \rangle = 1,0106$ $\langle \tau_v \rangle = 5,5156$ $S = 0,1794$	$\langle \tau_p \rangle = 1,0269$ $\langle \tau_v \rangle = 2,6146$ $S = 0,37724$	$\langle \tau_p \rangle = 1,2752$ $\langle \tau_v \rangle = 4,7332$ $S = 0,1656$
$\Delta\omega/\omega_0 \neq 0$ en J_0	$\langle \tau_p \rangle = 1,3010$ $\langle \tau_v \rangle = 5,5111$ $S = 0,1394$	$\langle \tau_p \rangle = 1,1579$ $\langle \tau_v \rangle = 2,6316$ $S = 0,3281$	$\langle \tau_p \rangle = 1,5579$ $\langle \tau_v \rangle = 4,7496$ $S = 0,1351$
$\Delta\omega/\omega_0 \neq 0$ en Θ	$\langle \tau_p \rangle = 1,0050$ $\langle \tau_v \rangle = 1,0023$ $S = 0,9927$	$\langle \tau_p \rangle = 1,0127$ $\langle \tau_v \rangle = 1,0043$ $S = 0,9832$	$\langle \tau_p \rangle = 1,5060$ $\langle \tau_v \rangle = 1,0233$ $S = 0,6488$
$\Delta\omega/\omega_0 \neq 0$ en v, Θ, J_0	$\langle \tau_p \rangle = 1,0502$ $\langle \tau_v \rangle = 1,0033$ $S = 0,9490$	$\langle \tau_p \rangle = 1,0574$ $\langle \tau_v \rangle = 1,0053$ $S = 0,9407$	$\langle \tau_p \rangle = 1,5406$ $\langle \tau_v \rangle = 1,0257$ $S = 0,6328$

Figura 8.3: Valores del ancho espacial y temporal de un pulso dispersado por diferentes sistemas con diferentes aproximaciones del valor $\Delta\omega/\omega_0$, en la posición del foco paraxial se ha representado por $z = f_0$.

De los datos en la tabla 8.3, se han obtenido las siguientes curvas, donde se expone la calidad de la señal, así como los segundos momentos del campo eléctrico.

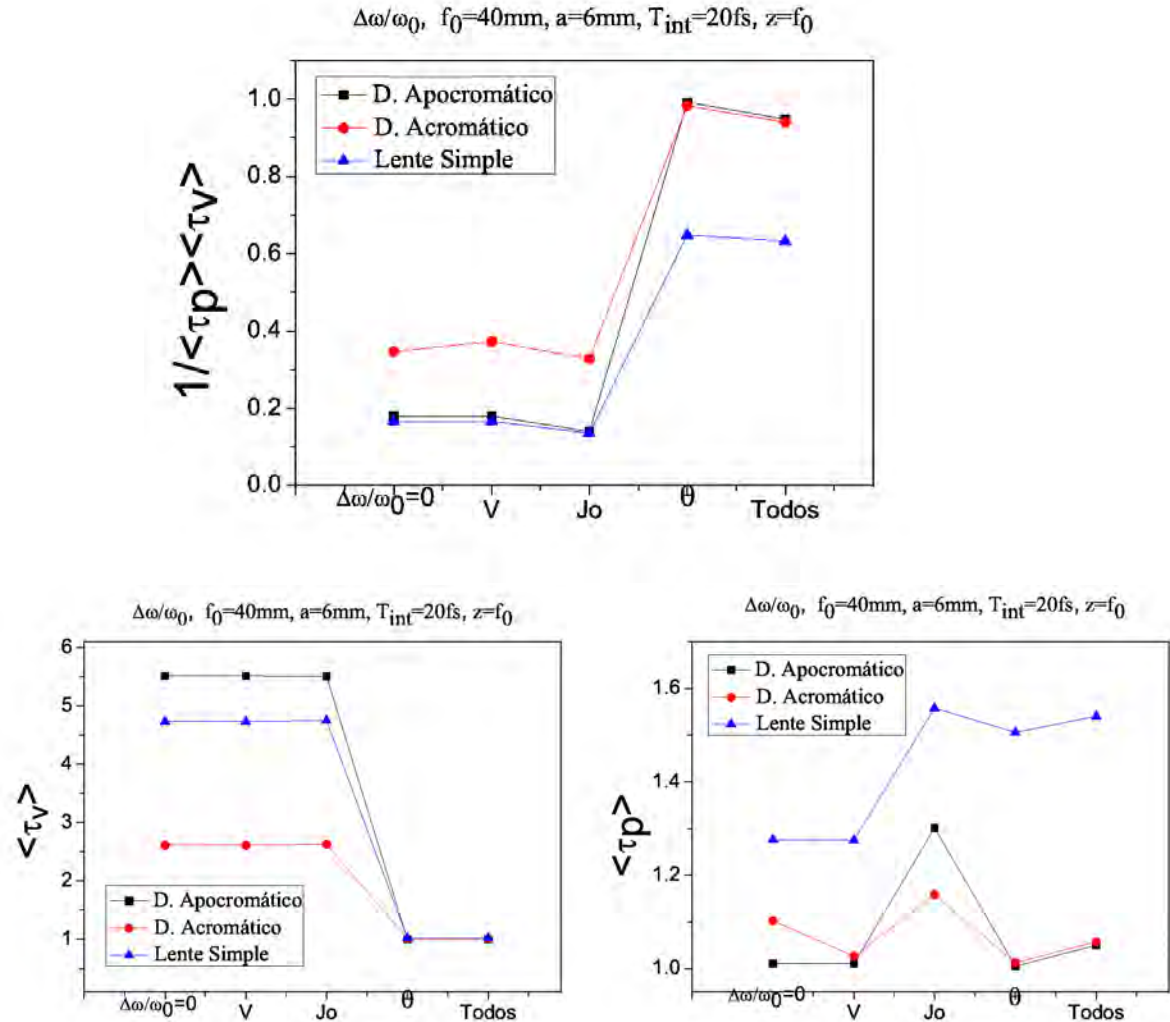


Figura 8.4: Calidad de señal y segundos momentos para diferentes sistemas refractivos, con diferentes consideraciones del término $\Delta\omega/\omega_0$.

De los resultados expuestos en la tabla y las gráficas, se concluye que la calidad de la señal es mayor cuando se considera el término $\Delta\omega/\omega_0$ en todos los términos involucrados, i.e., V , J_0 y θ . Por ejemplo para el doblete apocromático, se ha obtenido el valor de $S = 0.1794$ para el caso en el que $\Delta\omega/\omega_0 = 0$, en cambio, cuando este término se incluye en cada término, el valor de S es igual a 0.9490. Esto indica que la calidad de la señal en el foco paraxial será 5.28 veces mayor que la que se había predicho con la aproximación $\Delta\omega/\omega_0 = 0$. La aberración esférica provoca una disminución del segundo momento en espacio $\langle \tau_v \rangle$, aumentando drásticamente el valor de la calidad de la señal. El doblete apocromático, es el que da la calidad de la señal máxima.

Estos resultados, muestran la importancia del término $\Delta\omega/\omega_0$ para la calidad de la señal del campo difractado. Como menciona Sheppard [63,64], no es trivial el despreciar el ancho

de banda, él menciona que este término tiene consecuencias importantes en la obtención de imágenes, obtenidas por escaneo confocal, cuando un láser de pocos femtosegundos se usa para resolver la imagen en tiempo. El análisis del término $\Delta\omega/\omega_0$, para la difracción del campo de pulsos de menos de 20fs, debe profundizarse.

CAPÍTULO 9

Conclusiones

La expresión que proporciona el campo difractado de un pulso de luz que ha sido enfocado por una lente, tiene dos integrales, una en espacio y otra en frecuencias. Si la expansión del número de onda se realiza hasta segundo orden, la integral en frecuencias tiene una solución analítica (ecuación (1.146)), en cambio, si se realiza una expansión del número de onda hasta el tercer orden, la integral en frecuencias debe resolverse por algún método numérico (ecuación (1.144)). En ambos casos, la integral en espacio debe resolverse por un método numérico. En este trabajo de tesis, se ha estudiado por primera vez en la literatura el efecto de la dispersión de la velocidad de grupo de tercer orden. Esto ha sido posible a la implementación del método de integración de Gauss-Legendre, con ello se ha determinado el tipo de sistema refractivo que da una mejor calidad de señal. En esta tesis hemos definido la calidad de señal en términos de los segundos es espacio y tiempo del campo eléctrico del pulso, para evaluar donde se obtiene la máxima concentración de energía por unidad de área y de tiempo.

En el capítulo 2, se estudiaron los segundos momentos en espacio y tiempo ($\langle \tau_v \rangle$ y $\langle \tau_p \rangle$) por medio de la integración analítica en las frecuencias y con el método de Gauss-Legendre, considerando en el último, 96 nodos, tomando la expansión del número de onda hasta el segundo orden y 400 iteraciones en el cálculo de la intensidad en espacio y tiempo, los resultados obtenidos por cada método de integración, difieren hasta un 1 % para el segundo momento en tiempo y hasta 0.000006 % para el segundo momento en espacio. Por otra parte, el tiempo de cálculo computacional para determinar el campo difractado al usar el método de rectángulos para resolver la integral en espacio y conociendo la solución analítica en las frecuencias es de 36 minutos, si ahora la integral sobre las frecuencias se realiza con el método de Gauss-Legendre el tiempo de calculo es de 70 minutos y al considerar el método de rectángulos para resolver la integral en frecuencias, el tiempo de calculo es poco más de 6 días. Los resultados se obtuvieron con un procesador AMD Phenom(tm) 8400 Tripe-Core Processor. Con estos resultados obtuvimos que el método de Gauss-Legendre reduce en 95 % el tiempo de cálculo respecto al tiempo de cálculo

necesario para realizar la integral sobre frecuencias mediante el método por rectángulos.

En el capítulo 3 se estudio con ayuda del método de Gauss-Legendre, el efecto que tiene la diferencia del tiempo de propagación (PTD), en la calidad de la señal, cuando pulsos con una longitud de onda de la portadora de $\lambda_0=620\text{nm}$ y una duración de $T_{int}=7.2\text{fs}$ iluminan de manera uniforme lentes simples de BK7. Se calculó la calidad de la señal para lentes cuyo radio comprende desde 0.25mm hasta 5mm. Con ello se determinó la curva de la calidad de la señal y se comparó con la curva de intensidad que se reporta en el trabajo de Bor [52], de lo cual se concluye que la calidad de la señal es una medida que describe el mismo comportamiento que la intensidad. Así que la cantidad "calidad de la señal" propuesta en este trabajo de tesis, determina una medida de la intensidad del pulso al ser enfocado por una lente. En este resultado, radica la importancia de los resultados posteriores, en donde se reporta la calidad de la señal. Al estudiar la calidad de la señal para lentes de diferente radio, se determinó que la máxima calidad de la señal, se obtiene para un radio muy cercano al predicho por Bor como óptimo, [52], con lo que confirmamos su predicción. Se hizo un análisis del valor $\Delta T'$, el cual indica el valor del efecto de PTD calculado de la óptica geométrica, y se comparó con el valor del segundo momento $\langle \tau_p \rangle'$ para los pulsos de 7.2fs en la posición del foco paraxial, con ello se comprobó que el valor indicado por la óptica geométrica es cercano al valor de la óptica física. Después se consideraron los efectos de GVD de tercer orden y la aberración esférica de la lente en el calculo del campo difractado, para este caso encontramos que la calidad de señal es mayor para la misma lente, si se considera unicamente el efecto de PTD. Por lo que la predicción de Bor, para el radio óptimo es correcta a pesar de tener los efectos de GVD de tercer orden y la aberración esférica de la lente. Este resultado se ha obtenido ya que se estudio una lente simple, donde el efecto dominante es la aberración cromática. En este Capítulo también se analizó el efecto de PTD, para pulsos de $T_{int}=10\text{fs}$, $T_{int}=20\text{fs}$ y una longitud de onda de la portadora de 810nm, considerando únicamente el efecto de PTD, el valor de la calidad de la señal obtuvo máximos en posiciones cada vez más alejadas del valor del radio óptimo de Bor, al aumentar la duración del pulso y aún más al considerar los efectos de aberración esférica y de GVD.

En el capítulo 4, se analizaron dobletes acromáticos comerciales, fabricados con los vidrios LaK22 y SF6, todos ellos de igual diámetro pero de diferente distancia focal, $f=18\text{mm}$, $f=20\text{mm}$, $f=25\text{mm}$, $f=30\text{mm}$ y $f=40\text{mm}$. Usando el método de Gauss-Legendre, hemos evaluado la intensidad espacio-temporal de un pulso de 10fs y longitud de onda de la onda portadora igual a $\lambda_0 = 810\text{nm}$ a lo largo del eje óptico de cada doblete, suponiendo que el doblete es iluminado de manera uniforme y el haz colimado se propaga paralelo al eje óptico de la lente. Hemos encontrado que la intensidad máxima no se encuentra en el foco paraxial sino a $50\mu\text{m}$ hacia la lente, que corresponde a la posición para la cual el ensanchamiento espacial del pulso es mínimo. Hemos supuesto que la dispersión de la velocidad de grupo de segundo orden es cero, dado que es un efecto que se puede corregir usando un compresor de pulsos basado en un par de prismas, por ello se estudió solamente el efecto de tercer orden de GVD. Se encontró que la dispersión de la velocidad de grupo de tercer orden disminuye la calidad de la señal para pulsos de 10fs de manera

importante, esto fue determinado ya que es posible manejar de manera independiente los diferentes efectos, i.e., GVD, PTD y aberración esférica. Se encontró que la calidad de la señal es máxima para el doblete de distancia focal de 40mm. Aún corrigiendo todos los efectos de GVD, la calidad de la señal se ve disminuida por la aberración esférica y el efecto de PTD, llegando a ser hasta del 70 % comparada con la calidad de señal ideal (100 %), para el doblete de distancia focal de 40mm. La calidad de la señal es mayor para el doblete acromático de apertura numérica 0.15, ($NA=0.15$), ó distancia focal 40mm y va disminuyendo con la distancia focal de la lente, siendo mínima para el doblete de distancia focal $f_0=18$ mm, ($NA=0.33$). De estos resultados concluimos que para obtener una calidad de señal alta, para pulsos de duración menor a 10fs, se recomienda el uso de lentes de apertura numérica de 0.15 o menor.

En el capítulo 5 analizamos la calidad de la señal de los pulsos de diferente duración que son enfocados por el doblete acromático LaK22-SF6, cuya distancia focal es $f=40$ mm y apertura numérica igual a 0.15, la calidad de la señal se obtuvo a lo largo del eje óptico. Mostramos que el efecto de GVD de tercer orden va cobrando importancia al disminuir el tiempo del pulso. Mientras que para los pulsos de duración 20fs y 30fs, la calidad de la señal es prácticamente la misma al considerar el efecto de tercer orden de GVD o no considerarlo, los resultados son muy diferentes para pulsos de 10fs y 4.5fs, donde la calidad de la señal se ve seriamente disminuida al considerar el efecto de tercer orden de GVD. Por lo tanto, este efecto debe tenerse en cuenta para pulsos de duración menor a 20fs. Se analizó el efecto que tiene la aberración cromática para pulsos de 4.5fs, 10fs, 20fs y 200fs, al ser enfocados por el mismo doblete acromático, con lo que hemos podido entender que el efecto de PTD es un efecto que se escala con la duración del pulso, siendo mayor mientras la duración del pulso es menor.

En el capítulo 6, en busca de las condiciones que den una calidad de la señal optima, se estudiaron diferentes dobletes apocromáticos, los cuales fueron diseñados por la Dra. Martha Rosete. Se analizó la calidad de la señal de pulsos de $T_{int}=4.5$ fs y longitud de onda de la portadora igual a $\lambda_0 = 810$ nm, sobre el eje óptico, cuando son enfocados por dobletes apocromáticos. El estudio se hizo considerando únicamente el efecto de PTD y aberración esférica, i.e., sin el efecto de GVD. La apertura numérica de cada doblete fue de 0.15. Encontramos que el doblete apocromático formado por los vidrios FK51 y KzFSN2, dió la mayor calidad en la señal. Se hizo una comparación de la calidad de la señal para el doblete apocromático FK51-KzFSN2 y el doblete acromático LaK22-SF6, considerando únicamente la aberración esférica de los dobletes y el efecto de PTD, obteniéndose que la calidad de la señal mejora en un 50 % al usar el doblete apocromático.

Comparando la calidad de la señal obtenida cuando un pulso de 10fs es enfocado por el doblete apocromático FK51-KzFSN2, al considerar una corrección del efecto de GVD de segundo orden y cuando no se considera ningún orden de GVD, se observa que la calidad de la señal en el último caso aumenta en un 19 % respecto al primer caso. Este resultado puede compararse cualitativamente con imágenes obtenidas por microscopía de dos fotones, donde se utilizan pulsos de láser del orden de femtosegundos. En estas imágenes, se estudia la misma porción de tejido de ratón, con pulsos a los que solo se

ha corregido el efecto de GVD de segundo orden, las imágenes obtenidas son de menor calidad que las imágenes obtenidas cuando los pulsos utilizados tienen una corrección de ordenes altos de GVD (GVD=0). Esto ha sido reportado por Dantus *et.al.* [25], en tal experimento se ha utilizado una lente apocromática y un láser pulsado de 10fs, con una longitud de onda de 800nm.

La diferencia entre la calidad de la señal que se obtiene cuando los pulsos son enfocados por los dobletes acromáticos y apocromáticos, aumenta al disminuir la duración temporal del pulso. Esto se mostró analizando pulsos de 4.5fs y 10fs, por lo que se recomienda el uso de los dobletes apocromáticos en dispositivos en los que se necesite enfocar pulsos con duración menor a 10fs.

Estudiamos el campo difractado por una lente a la distancia de 1250 micras del foco paraxial sobre el eje óptico, donde hemos observado el pulso creado por la difracción en el borde de la lente. Este pulso secundario fue predicho teóricamente por Bor y unos años después, se verificó su existencia de manera experimentalmente por el mismo Bor y otros autores. Se comprobó que la posición del pulso secundario es la distancia predicha por Bor, esto se determinó considerando solo la difracción en el borde de la lente, sin incluir los efectos de dispersión de la velocidad de grupo, la aberración esférica de la lente y el efecto de la diferencia en el tiempo de propagación. Cuando se tienen los efectos de la aberración esférica, PTD y el efecto de GVD, el pulso secundario se encuentra en la posición predicha por Bor *et.al.*, pero sufre un ensanchamiento debido a tales efectos.

Finalmente fue posible analizar la difracción del campo sin la aproximación $\Delta\omega/\omega_o \rightarrow 0$, la cual se encuentra en todos los trabajos que muestran una solución analítica en la integral de frecuencias. Hemos obtenido que la calidad de la señal al incluir el término $\Delta\omega/\omega_o$ en la integral de las frecuencias, es mayor hasta 5 veces comparada con la calidad de la señal obtenida cuando $\Delta\omega/\omega_o \rightarrow 0$, para pulsos de 20fs que han sido enfocados por un doblete apocromático. El tiempo de calculo computacional aumento a 36 horas, debido a la inclusión de la función de Bessel de orden cero, en la integral que determina el campo resultante.

9.1. Trabajo a futuro

En base a los resultados obtenidos, se plantea el siguiente trabajo a futuro:

1. Estudiar la difracción del campo de pulsos de luz láser, enfocada por sistemas refractivos y considerando el efecto de la polarización.
2. Incorporar la integral en espacio, en el algoritmo de Gauss-Legendre, con lo que se espera reducir el tiempo de cálculo y los errores numéricos.
3. Encontrar la calidad de la señal sobre el eje óptico para lentes simples, dobletes acromáticos y apocromáticos, sin la aproximación $\Delta\omega/\omega_0 = 0$ para pulsos menores a 20fs, así como de diferentes aperturas numéricas.

4. Estudiar el campo difractado del pulso en la región focal de las lentes, cuando el haz que incide en la lente se propaga colimado pero haciendo un ángulo con respecto al eje óptico de la lente. En este caso, se deberán tomar en cuenta no solo la aberración esférica, sino también coma, astigmatismo y curvatura de campo.

Análisis del campo cerca de la región focal, considerando la expansión del número de onda hasta segundo orden

En este apéndice se muestra el desarrollo de la integral del campo, una vez que ha pasado por la lente, el resultado final nos da el campo del pulso cerca de la región focal paraxial. En el desarrollo se ha tomado la expansión del número de onda en serie de Taylor alrededor de la frecuencia central ω_0 de la portadora, hasta segundo orden. Haciendo este desarrollo, el número de onda se puede expresar como:

$$k_\ell = \frac{\omega_0}{c}n(\omega_0) + \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{c}n(\omega)\right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{\omega}{c}n(\omega)\right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \quad (\text{A.1})$$

Siendo la amplitud del campo en el plano focal

$$U(x_2, y_2, z, \Delta\omega) \approx \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dy_1 P(x_1, y_1) U_0(x_1, y_1) A(\Delta\omega) \Phi(x_1, y_1) e^{-i\Theta(x_1, y_1)} \times e^{i\frac{k_a}{2z}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]} \quad (\text{A.2})$$

donde:

P : define la función pupila

A : define la amplitud del pulso

U_0 : indica la iluminación (gaussiana o uniforme)

Θ : indica la aberración esférica de la lente

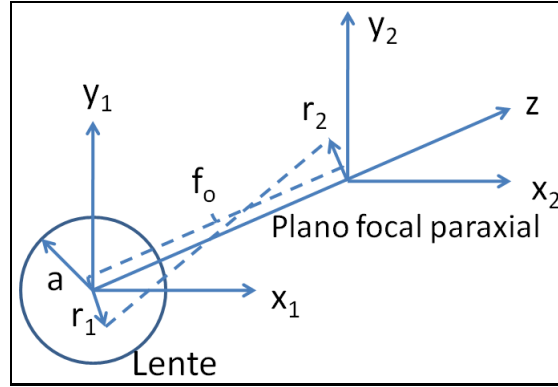


Figura A.1: Las coordenadas de la lente están caracterizadas por (x_1, y_1) , las coordenadas del plano focal por (x_2, y_2) .

La pupila de la lente se considera circular de radio ρ , por lo que está definida por:

$$P(x_1, y_1) = \begin{cases} 1 & x_1^2 + y_1^2 \leq r_1^2 = (\rho r)^2 \quad \text{donde } r \in [0, 1] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

El término de la fase una vez que el pulso ha pasado a través de la lente es:

$$\Phi(x_1, y_1) = e^{i(k_{\ell 1} d_1 + k_{\ell 2} d_2)} e^{-i(k_{\ell 1} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2}\right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} e^{-i(k_{\ell 2} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2}\right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)} \quad (\text{A.4})$$

donde R_1 , R_2 y R_3 son las curvaturas que definen al doblete, reagrupando términos podemos expresar el término de fase como:

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, y_1) &= e^{i(k_{\ell 1} d_1 + k_{\ell 2} d_2)} \\ &\times e^{-i(k_{\ell 1} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1}\right)} e^{-i(k_{\ell 1} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{-i(k_{\ell 2} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} e^{-i(k_{\ell 2} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_3}\right)} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Las diferencias entre el número de onda de la lente y del aire, considerando que el índice de refracción del aire es igual a 1 para ω_0 , se puede expresar como:

$$k_{\ell} - k_a = \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0) - \frac{\omega_0}{c} (1) = \frac{\omega_0}{c} (n(\omega_0) - 1) = k_0 (n(\omega_0) - 1) \quad (\text{A.6})$$

Realizando el desarrollo de cada derivada de la ecuación (B.1) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{c} n(\omega) \right) \Big|_{\omega=\omega_0} &= \frac{n(\omega_0)}{c} + \frac{\omega_0}{c} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \\ \frac{d^2}{d\omega^2} \left(\frac{\omega}{c} n(\omega) \right) \Big|_{\omega=\omega_0} &= \frac{d}{d\omega} \left(\frac{n(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} \\ &= \left(\frac{2}{c} \frac{dn(\omega)}{d\omega} + \frac{\omega}{c} \frac{d^2 n(\omega)}{d\omega^2} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} \end{aligned}$$

Sustituyendo estas dos ecuaciones, el número de onda desarrollando hasta segundo orden queda expresado como:

$$k_\ell = \frac{\omega_0}{c}n(\omega_0) + \left(\frac{n(\omega_0)}{c} + \frac{\omega_0}{c} \frac{dn(\omega)}{d\omega}\right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{c} \frac{dn(\omega)}{d\omega} + \frac{\omega}{c} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2}\right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \quad (\text{A.7})$$

al considerar que $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ y reagrupando términos, podemos expresar el número de onda como:

$$k_\ell = \frac{\omega_0}{c}n(\omega_0) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{n(\omega_0)} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \right) \Delta\omega + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\omega_0 n(\omega_0)} \frac{dn(\omega)}{d\omega} + \frac{1}{n(\omega)} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\Delta\omega)^2 \right\} \quad (\text{A.8})$$

Nombrado

$$a_1 \equiv \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{n_0} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0}$$

$$a_2 \equiv \frac{1}{\omega_0 n(\omega_0)} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2n(\omega_0)} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0}$$

así que la diferencia en la primer derivada (término $\sim \Delta\omega$) y en la segunda derivada, (término $\sim \Delta\omega^2$), se expresan como:

$$b_1 = \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{n_0 - 1} \frac{d(n(\omega) - 1)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{n_0 - 1} \frac{d(n(\omega))}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0}$$

$$b_2 = \frac{1}{\omega_0(n(\omega_0) - 1)} \frac{d(n(\omega) - 1)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2(n(\omega_0) - 1)} \frac{d^2(n(\omega) - 1)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0}$$

$$= \frac{1}{\omega_0(n(\omega_0) - 1)} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2(n(\omega_0) - 1)} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0}$$

Si consideramos que tenemos dos vidrios en un doblete, tendremos b_1^1 y b_1^2 que determinan las primeras derivadas para cada vidrio, así mismo b_2^1 y b_2^2 que determinan las segundas derivadas para cada vidrio. Ahora, considerando que (B.5) es un término compuesto por dos términos, donde el primero esta definido por:

$$E_1 = e^{i(k_{\ell 1} d_1 + k_{\ell 2} d_2)}$$

y el segundo:

$$E_2 = e^{-i(k_{\ell 1} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1}\right)} e^{-i(k_{\ell 1} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} e^{-i(k_{\ell 2} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} e^{-i(k_{\ell 2} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_3}\right)} \quad (\text{A.9})$$

haciendo un poco de algebra podemos expresar cada uno de estos términos como:

$$E_1 = e^{i(k_{\ell 1}d_1 + k_{\ell 2}d_2)} = e^{ik_0(n_1d_1[1+a_1^1\Delta\omega+a_2^1(\Delta\omega)^2] + n_2d_2[1+a_1^2\Delta\omega+a_2^2(\Delta\omega)^2])} \quad (\text{A.10})$$

mientras que $k_{\ell} - k_a = k_0(n_0 - 1)[1 + b_1\Delta\omega + b_2(\Delta\omega)^2]$ por lo que el segundo término se puede expresar como:

$$\begin{aligned} E_2 &= e^{-i(k_{\ell 1} - k_a)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1}\right) + i(k_{\ell 1} - k_a)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right) - i(k_{\ell 2} - k_a)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right) + i(k_{\ell 2} - k_a)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_3}\right)} \\ &= e^{-ik_0(n_{01} - 1)(1 + b_1^1\Delta\omega + b_2^1(\Delta\omega)^2)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1}\right)} \\ &\times e^{ik_0(n_{01} - 1)(1 + b_1^1\Delta\omega + b_2^1(\Delta\omega)^2)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{-ik_0(n_{02} - 1)(1 + b_1^2\Delta\omega + b_2^2(\Delta\omega)^2)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{ik_0(n_{02} - 1)(1 + b_1^2\Delta\omega + b_2^2(\Delta\omega)^2)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_3}\right)} \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

donde $n_{01} = n(\omega_0)$ para la lente 1 y $n_{02} = n(\omega_0)$ para la lente 2. El último término de (B.2) será nombrado como E_3

$$E_3 = e^{\frac{ik_a}{2z} \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right)} \quad (\text{A.12})$$

donde k_a , se expande en serie de Taylor hasta el primer orden, así que k_a queda definido por

$$k_a = \frac{\omega}{c} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{c} \frac{d\omega}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) = \frac{\omega_0}{c} + \frac{\Delta\omega}{c} = \frac{\omega_0}{c} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) = k_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \quad (\text{A.13})$$

entonces podemos escribir a la ecuación (B.13) como

$$\begin{aligned} e^{\frac{ik_a}{2z} [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} &= e^{\frac{ik_0}{2z} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]} \\ &= e^{\frac{ik_0}{2z} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) (x_2^2 - 2x_1x_2 + x_1^2 + y_2^2 - 2y_1y_2 + y_1^2)} \\ &= e^{\frac{ik_0}{2z} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) [(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2)]} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

sustituyendo (B.11), (B.12) y (B.15) en (B.2), la amplitud del campo esta determinada por:

$$\begin{aligned} U(x_2, y_2, z, \Delta\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 P(x_1, y_1) U_0(x_1, y_1) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(x_1, y_1)} \\ &\times e^{ik_0(n_1d_1[1+a_1^1\Delta\omega+a_2^1(\Delta\omega)^2] + n_2d_2[1+a_1^2\Delta\omega+a_2^2(\Delta\omega)^2])} \\ &\times e^{-ik_0(n_{01} - 1)(1 + b_1^1\Delta\omega + b_2^1(\Delta\omega)^2)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1}\right)} \\ &\times e^{ik_0(n_{01} - 1)(1 + b_1^1\Delta\omega + b_2^1(\Delta\omega)^2)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{-ik_0(n_{02} - 1)(1 + b_1^2\Delta\omega + b_2^2(\Delta\omega)^2)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{ik_0(n_{02} - 1)(1 + b_1^2\Delta\omega + b_2^2(\Delta\omega)^2)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_3}\right)} \\ &\times e^{\frac{ik_0}{2z} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) [(x_1^2 + y_1^2) + (x_2^2 + y_2^2) - 2(x_1x_2 + y_1y_2)]} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

de nuevo dividimos los términos en un conjunto de tres exponenciales, la primera es:

$$E_1 = e^{ik_0(n_1 d_1 [1+a_1^1 \Delta\omega + a_2^1 (\Delta\omega)^2] + n_2 d_2 [1+a_1^2 \Delta\omega + a_2^2 (\Delta\omega)^2])} \quad (\text{A.16})$$

la segunda

$$\begin{aligned} E_2 &= e^{-ik_0(n_{01}-1)(1+b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_1}\right)} \\ &\times e^{ik_0(n_{01}-1)(1+b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{-ik_0(n_{02}-1)(1+b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{ik_0(n_{02}-1)(1+b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_3}\right)} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

y la tercera

$$E_3 = e^{\frac{ik_0}{2z} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) [(x_1^2+y_1^2) + (x_2^2+y_2^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)]} \quad (\text{A.18})$$

multiplicamos este último término por un 1, en la forma

$$1 = e^0 = e^{i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2) - i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)}$$

de tal forma que (B.19) queda

$$E_3 = e^{\frac{ik_0}{2z} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) [(x_1^2+y_1^2) + (x_2^2+y_2^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)]} e^{i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2) - i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)} \quad (\text{A.19})$$

reagrupando términos obtenemos

$$\begin{aligned} E_3 &= e^{\frac{ik_0}{2z}(x_1^2+y_1^2)} \underbrace{e^{\frac{ik_0}{2z} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) (x_1^2+y_1^2)}}_a \\ &\times e^{\frac{ik_0}{2z} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) [(x_2^2+y_2^2) - 2(x_1 x_2 + y_1 y_2)]} \underbrace{e^{i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)}}_b e^{-i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.20})$$

los términos (a) y (b) se colocan dentro de la segunda exponencial E_2 , tal que

$$\begin{aligned} E_2 &= e^{-ik_0(n_{01}-1)(1+b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_1}\right)} \\ &\times e^{ik_0(n_{01}-1)(1+b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{-ik_0(n_{02}-1)(1+b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{ik_0(n_{02}-1)(1+b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_3}\right)} \\ &\times e^{\frac{ik_0}{2z} \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) (x_1^2+y_1^2)} e^{i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

de tal manera que la tercer exponencial queda definida por:

$$\begin{aligned}
E_3 &= e^{\frac{ik_0}{2z}(x_1^2+y_1^2)} e^{\frac{ik_0}{2z}(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}) \left[(x_2^2+y_2^2) - 2(x_1x_2+y_1y_2) \right]} e^{-i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)} \\
&= e^{\frac{ik_0}{2z}(x_1^2+y_1^2)} e^{ik_0(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}) \left[\frac{x_2^2+y_2^2}{2z} - \frac{x_1x_2+y_1y_2}{z} \right]} e^{-i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)}
\end{aligned} \tag{A.22}$$

se consideran las siguientes aproximaciones:

$$\frac{x_2^2 + y_2^2}{2z} \approx \frac{x_2^2 + y_2^2}{2f_0} \quad \text{y} \quad \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{z} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{f_0} \tag{A.23}$$

debido a estas, rescribimos el término E_3

$$E_3 = e^{\frac{ik_0}{2z}(x_1^2+y_1^2)} e^{ik_0(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}) \left[\frac{x_2^2+y_2^2}{2f_0} - \frac{x_1x_2+y_1y_2}{f_0} \right]} e^{-i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)} \tag{A.24}$$

Considerando que la potencia del doblete esta dado en términos del índice de refracción y los radios de curvatura mediante la expresión

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = (n_{01} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n_{02} - 1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \tag{A.25}$$

entonces el término E_2 se puede expresar por:

$$\begin{aligned}
E_2 &= e^{-ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \frac{(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2)}{R_1}} e^{ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \frac{(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2)}{R_2}} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \frac{(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2)}{R_2}} e^{ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \frac{(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2)}{R_3}} \\
&\times e^{ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \frac{1}{z}} e^{ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \frac{1}{f_0}} \\
&= e^{-ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \frac{(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2)}{R_1}} e^{ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \frac{(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2)}{R_2}} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \frac{(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2)}{R_2}} e^{ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \frac{(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2)}{R_3}} \\
&\times e^{ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \frac{1}{z}} e^{ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \left\{ (n_{01}-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + (n_{02}-1) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3} \right) \right\}} \\
&= e^{-ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \frac{(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2)}{R_1}} e^{ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \frac{(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2)}{R_2}} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \frac{(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2)}{R_2}} e^{ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \frac{(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2)}{R_3}} \\
&\times e^{ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \frac{1}{z}} e^{ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \left\{ \frac{(n_{01}-1)}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)}{R_3} \right\}} \\
&= e^{-ik_0 \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2} \right) \left\{ \frac{(n_{01}-1)(b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2)}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)(b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2)}{R_2} \right.} \\
&\quad \left. + \frac{(n_{02}-1)(b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2)}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)(b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2)}{R_3} - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \frac{1}{z} \right\}}
\end{aligned} \tag{A.26}$$

Debido a la simetría circular de la lente, se hace un cambio de coordenadas a coordenadas polares para describir la lente y el plano focal

Coord. de la lente	Coord. del plano focal
$x_1 = r_1 \cos \theta$	$x_2 = r_2 \cos \varphi$
$y_1 = r_1 \sin \theta$	$y_2 = r_2 \sin \varphi$

al considerar este cambio de coordenadas la función que describe la pupila queda definida por

$$P(r, \theta) = \begin{cases} 1 & x_1^2 + y_1^2 \leq r_1^2 = (\rho r)^2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

donde ρ es el semidiámetro de la lente. Tomando solo estas consideraciones, hacemos el cambio de coordenadas cartesianas a polares

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta P(r, \theta) = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \quad (\text{A.28})$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión del campo, encontramos

$$\begin{aligned} U(z, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\ &\times e^{ik_0(n_1 d_1 [1+a_1^1 \Delta\omega + a_2^1 (\Delta\omega)^2] + n_2 d_2 [1+a_1^2 \Delta\omega + a_2^2 (\Delta\omega)^2])} \\ &\times e^{-ik_0 \left(\frac{\rho r}{2}\right)^2 \left\{ \frac{(n_{01}-1)(b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2)}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)(b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2)}{R_2} \right.} \\ &\quad \left. + \frac{(n_{02}-1)(b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2)}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)(b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2)}{R_3} - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \frac{1}{z} \right\}} \\ &\times e^{ik_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \left\{ \frac{r_2^2}{2f_0} - \frac{(\rho r)r_2 \cos \theta \cos \varphi + (\rho r)r_2 \sin \theta \sin \varphi}{f_0} \right\}} \\ &e^{-\frac{ik_0}{2} (\rho r)^2 \left(\frac{1}{f_0} - \frac{1}{z}\right)} \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Considerando sólo la parte angular, podemos ver que esta es una expresión conocida, la función de orden cero de Bessel

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\frac{k_0}{f_0} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) (\rho r r_2) (\cos \theta \cos \varphi)} &= \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i\frac{k_0}{f_0} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) (\rho r r_2) (\cos(\theta - \varphi))} \\ &= J_0 \left(\frac{k_0}{f_0} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) (\rho r r_2) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.30})$$

Así que el campo queda definido por:

$$\begin{aligned}
U(z, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
&\times e^{ik_0(n_1 d_1 [1+a_1^1 \Delta\omega + a_2^1 (\Delta\omega)^2] + n_2 d_2 [1+a_1^2 \Delta\omega + a_2^2 (\Delta\omega)^2])} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right) \left\{ \frac{(n_{01}-1)(b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2)}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)(b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2)}{R_2} \right.} \\
&\quad \left. + \frac{(n_{02}-1)(b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2)}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)(b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2)}{R_3} - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \frac{1}{z} \right\}} \\
&\times e^{ik_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \frac{r_2^2}{2f_0}} e^{-\frac{ik_0}{2} (\rho r)^2 \left(\frac{1}{f_0} - \frac{1}{z}\right)} J_0 \left(\frac{k_0}{f_0} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) (\rho r r_2) \right) \quad (A.31)
\end{aligned}$$

Ahora se reescribe tomando en cuenta las coordenadas ópticas, donde

$$u \equiv \rho^2 k_0 \left(\frac{1}{f_0} - \frac{1}{z} \right), \quad v \equiv \frac{\rho r_2 k_0}{f_0}, \quad N = \frac{\rho^2 k_0}{2f_0} \quad (A.32)$$

por lo que (B.33) se puede reescribir

$$\begin{aligned}
U(u, v, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
&\times e^{ik_0(n_1 d_1 [1+a_1^1 \Delta\omega + a_2^1 (\Delta\omega)^2] + n_2 d_2 [1+a_1^2 \Delta\omega + a_2^2 (\Delta\omega)^2])} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right) \left\{ \frac{(n_{01}-1)(b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2)}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)(b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2)}{R_2} \right.} \\
&\quad \left. + \frac{(n_{02}-1)(b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2)}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)(b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2)}{R_3} - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \frac{1}{z} \right\}} \\
&\times e^{i \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \frac{v^2}{4N}} e^{-\frac{ir^2 u}{2}} J_0 \left(v r \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \right) \quad (A.33)
\end{aligned}$$

a partir de esta expresión se agrupan los términos con $\Delta\omega$ y $(\Delta\omega)^2$

$$\begin{aligned}
U(u, v, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
&\times e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2) + ik_0 \Delta\omega (n_1 d_1 a_1^1 + n_2 d_2 a_1^2) + ik_0 (\Delta\omega)^2 (n_1 d_1 a_2^1 + n_2 d_2 a_2^2)} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right) \left\{ \Delta\omega \left(\frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_3} - \frac{1}{z\omega_0} \right) \right\}} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right) \left\{ (\Delta\omega)^2 \left(\frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_3} \right) \right\}} \\
&\times e^{i \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \frac{v^2}{4N}} e^{-\frac{ir^2 u}{2}} J_0 \left(v r \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \right) \quad (A.34)
\end{aligned}$$

Se suma y resta la cantidad $k_0 \rho^2 / 2f_0 \omega_0$ en la exponencial que contiene al término $\Delta\omega$

$$\begin{aligned}
U(u, v, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
&\times e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2) + ik_0 \Delta\omega (n_1 d_1 a_1^1 + n_2 d_2 a_1^2) + ik_0 (\Delta\omega)^2 (n_1 d_1 a_2^1 + n_2 d_2 a_2^2)} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right) \left\{ \Delta\omega \left(\frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_3} - \frac{1}{z\omega_0} \right) \right\}} \\
&\times e^{-ir^2 \Delta\omega \left(\frac{k_0 \rho^2}{2f_0 \omega_0} - \frac{k_0 \rho^2}{2f_0 \omega_0} \right)} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right) \left\{ (\Delta\omega)^2 \left(\frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_3} \right) \right\}} \\
&\times e^{i\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \frac{v^2}{4N}} e^{-\frac{ir^2 u}{2}} J_0\left(vr \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right)
\end{aligned} \tag{A.35}$$

reescribiendo estos términos

$$\begin{aligned}
U(u, v, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
&\times e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2) + ik_0 \Delta\omega (n_1 d_1 a_1^1 + n_2 d_2 a_1^2) + ik_0 (\Delta\omega)^2 (n_1 d_1 a_2^1 + n_2 d_2 a_2^2)} \\
&\times e^{-ir^2 \Delta\omega \left\{ \frac{k_0 \rho^2}{2} \left(\frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_3} \right) + \frac{k_0 \rho^2}{2\omega_0} \left[\frac{1}{f_0} - \frac{1}{z} \right] - \frac{k_0 \rho^2}{2\omega_0} \right\}} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right) \left\{ (\Delta\omega)^2 \left(\frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_3} \right) \right\}} \\
&\times e^{i\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \frac{v^2}{4N}} e^{-\frac{ir^2 u}{2}} J_0\left(vr \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right)
\end{aligned} \tag{A.36}$$

haciendo el cambio a coordenadas ópticas, se tiene

$$\begin{aligned}
U(u, v, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
&\times e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2) + ik_0 \Delta\omega (n_1 d_1 a_1^1 + n_2 d_2 a_1^2) + ik_0 (\Delta\omega)^2 (n_1 d_1 a_2^1 + n_2 d_2 a_2^2)} \\
&\times e^{-ir^2 \Delta\omega \left\{ \frac{k_0 \rho^2}{2} \left(\frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_3} \right) + \frac{u}{2\omega_0} - \frac{k_0 \rho^2}{2\omega_0} \right\}} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right) \left\{ (\Delta\omega)^2 \left(\frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_3} \right) \right\}} \\
&\times e^{i\left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \frac{v^2}{4N}} e^{-\frac{ir^2 u}{2}} J_0\left(vr \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right)
\end{aligned} \tag{A.37}$$

Definimos:

$$\begin{aligned}
\tau' &\equiv k_0(n_1 d_1 a_1^1 + n_2 d_2 a_1^2) \\
\delta' &\equiv k_0(n_1 d_1 a_2^1 + n_2 d_2 a_2^2) \\
\tau &\equiv \frac{k_0 \rho^2}{2} \left(\frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_3} \right) - \left(\frac{k_0 \rho^2}{2\omega_0 f_0} - \frac{u}{2\omega_0} \right) \\
\delta &\equiv \frac{\rho^2 k_0}{2} \left(\frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_3} \right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas definiciones, y considerando que $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$, el campo queda descrito por

$$U(u, v, \Delta\omega) = \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} \\ \times e^{i\Delta\omega(\tau' - r^2\tau)} e^{i(\Delta\omega)^2(\delta' - r^2\delta)} e^{i(\frac{v^2}{4N} - \frac{r^2 u}{2})} J_0(vr) \quad (\text{A.38})$$

Siendo los pulsos considerados gaussianos, la amplitud del campo se puede expresar como

$$A(\Delta\omega) = A_0 e^{-\left(\frac{T\Delta\omega}{2}\right)^2}$$

sustituyendo la amplitud del campo en la expresión anterior

$$U(u, v, \Delta\omega) = \int_0^1 r dr U_0(r) e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} \\ \times e^{i\Delta\omega(\tau' - r^2\tau)} e^{-(\Delta\omega)^2\left[\frac{T^2}{4} - i(\delta' - r^2\delta)\right]} e^{i\left(\frac{v^2}{4N} - \frac{r^2 u}{2}\right)} J_0(vr) \quad (\text{A.39})$$

Para obtener el campo en el plano focal, se obtiene la transformada de Fourier

$$U(r, u, v, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) e^{-i(\Delta\omega)t} U(r, u, v, z, \Delta\omega) \quad (\text{A.40})$$

de tal manera que

$$U(u, v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) e^{-i(\Delta\omega)t} \int_0^1 r dr U_0(r) e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} \\ \times e^{i\Delta\omega(\tau' - r^2\tau)} e^{-(\Delta\omega)^2\left[\frac{T^2}{4} - i(\delta' - r^2\delta)\right]} e^{i\left(\frac{v^2}{4N} - \frac{r^2 u}{2}\right)} J_0(vr) \quad (\text{A.41})$$

reescribiendo

$$U(u, v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) \int_0^1 r dr U_0(r) e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} \\ \times e^{-i\Delta\omega(t - \tau' + r^2\tau)} e^{-(\Delta\omega)^2\left[\frac{T^2}{4} - i(\delta' - r^2\delta)\right]} e^{i\left(\frac{v^2}{4N} - \frac{r^2 u}{2}\right)} J_0(vr) \quad (\text{A.42})$$

Definimos:

$$p^2 = \frac{T^2}{4} - i(\delta' - r^2\delta) \\ q = -i(t - \tau' + r^2\tau)$$

entonces

$$U(u, v, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) \int_0^1 r dr U_0(r) e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} \\ \times e^{q\Delta\omega} e^{-(\Delta\omega)^2[p^2]} e^{i\left(\frac{v^2}{4N} - \frac{r^2 u}{2}\right)} J_0(vr) \quad (\text{A.43})$$

La integral sobre $d(\Delta\omega)$ tiene solución analítica [90], de la forma

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-p^2 x^2 \pm qx} = \sqrt{\frac{\pi}{p^2}} e^{-q^2/4p^2} \quad (\text{A.44})$$

sustituyendo las variables correspondientes, podemos finalmente expresar el campo como

$$\begin{aligned} U(u, v, t) &= \int_0^1 r dr U_0(r) e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} \\ &\times e^{i(\frac{v^2}{4N} - \frac{r^2 u}{2})} J_0(vr) \sqrt{\frac{\pi}{(T^2/4) - i(\delta' - r^2 \delta)}} e^{\frac{(t-r'+r^2\tau)^2}{T^2 - 4i(\delta' - r^2\delta)}} \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Esta es la integral que ha sido programada, para obtener el campo en la vecindad del foco paraxial considerando la expansión del número de onda, hasta el segundo orden.

APÉNDICE **B**

Análisis del campo cerca de la región focal, considerando la expansión del número de onda hasta tercer orden

En este apéndice se muestra el desarrollo mencionado en el Apéndice A, pero considerando la expansión en serie de Taylor del número de onda hasta el tercer orden, alrededor de la frecuencia central ω_0 que corresponde a la frecuencia de la onda portadora. Haciendo este desarrollo, el número de onda se puede expresar como:

$$k_\ell = \frac{\omega_0}{c}n(\omega_0) + \frac{d}{d\omega}\left(\frac{\omega}{c}n(\omega)\right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\omega^2}\left(\frac{\omega}{c}n(\omega)\right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\frac{d^3}{d\omega^3}\left(\frac{\omega}{c}n(\omega)\right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^3 \quad (\text{B.1})$$

Siendo la amplitud del campo en el plano focal

$$U(x_2, y_2, z, \Delta\omega) \approx \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 dy_1 P(x_1, y_1) U_0(x_1, y_1) A(\Delta\omega) \Phi(x_1, y_1) e^{-i\Theta(x_1, y_1)} \times e^{i\frac{ka}{2z}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]} \quad (\text{B.2})$$

donde:

P : define la función pupila

A : define la amplitud del pulso

U_0 : indica la iluminación (gaussiana o uniforme)

Θ : indica la aberración esférica de la lente

La pupila de la lente se considera circular de radio ρ , por lo que esta definida por:

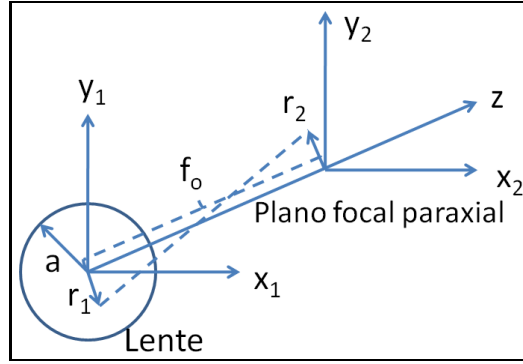


Figura B.1: Las coordenadas de la lente están caracterizadas por (x_1, y_1) , las coordenadas del plano focal por (x_2, y_2) .

$$P(x_1, y_1) = \begin{cases} 1 & x_1^2 + y_1^2 = r_1^2 = (\rho r)^2 \quad \text{donde } r \in [0, 1] \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (\text{B.3})$$

El término de la fase una vez que el pulso a pasado a través de la lente es:

$$\Phi(x_1, y_1) = e^{i(k_{\ell 1} d_1 + k_{\ell 2} d_2)} e^{-i(k_{\ell 1} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2}\right) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)} e^{-i(k_{\ell 2} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2}\right) \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right)} \quad (\text{B.4})$$

donde R_1 , R_2 y R_3 son las curvaturas que definen al doblete, reagrupando términos podemos expresar el término de fase como:

$$\begin{aligned} \Phi(x_1, y_1) &= e^{i(k_{\ell 1} d_1 + k_{\ell 2} d_2)} \\ &\times e^{-i(k_{\ell 1} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1}\right)} e^{-i(k_{\ell 1} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{-i(k_{\ell 2} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} e^{-i(k_{\ell 2} - k_a) \left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_3}\right)} \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Las diferencias entre el número de onda de la lente y del aire, considerando que el índice de refracción del aire es igual a 1 para ω_0 , se puede expresar como:

$$k_{\ell} - k_a = \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0) - \frac{\omega_0}{c} (1) = \frac{\omega_0}{c} (n(\omega_0) - 1) = k_0 (n(\omega_0) - 1) \quad (\text{B.6})$$

Realizando el desarrollo de cada derivada de la ecuación (B.1) obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\omega} \left(\frac{\omega}{c} n(\omega) \right) \Big|_{\omega=\omega_0} &= \frac{n(\omega_0)}{c} + \frac{\omega_0}{c} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \\
\frac{d^2}{d\omega^2} \left(\frac{\omega}{c} n(\omega) \right) \Big|_{\omega=\omega_0} &= \frac{d}{d\omega} \left(\frac{n(\omega)}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} \\
&= \left(\frac{2}{c} \frac{dn(\omega)}{d\omega} + \frac{\omega}{c} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} \\
\frac{d^3}{d\omega^3} \left(\frac{\omega}{c} n(\omega) \right) \Big|_{\omega=\omega_0} &= \frac{d}{d\omega} \left(\frac{2}{c} \frac{dn(\omega)}{d\omega} + \frac{\omega}{c} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} \\
&= \frac{3}{c} \frac{d^2n}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{\omega}{c} \frac{d^3n}{d\omega^3} \Big|_{\omega=\omega_0}
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas ecuaciones, el número de onda expandido hasta tercer orden queda expresado por:

$$\begin{aligned}
k_\ell &= \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0) + \left(\frac{n(\omega_0)}{c} + \frac{\omega_0}{c} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{c} \frac{dn(\omega)}{d\omega} + \frac{\omega}{c} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^2 \\
&\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{3}{c} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} + \frac{\omega}{c} \frac{d^3n(\omega)}{d\omega^3} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0)^3
\end{aligned} \tag{B.7}$$

al considerar que $\Delta\omega = \omega - \omega_0$ y reagrupando términos, podemos expresar el número de onda como:

$$\begin{aligned}
k_\ell &= \frac{\omega_0}{c} n(\omega_0) \left\{ 1 + \left(\frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{n(\omega_0)} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} \Delta\omega \right. \\
&\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{\omega_0 n(\omega_0)} \frac{dn(\omega)}{d\omega} + \frac{1}{n(\omega)} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\Delta\omega)^2 \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \left(\frac{3}{\omega_0 n(\omega_0)} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} + \frac{1}{n(\omega)} \frac{d^3n(\omega)}{d\omega^3} \right) \Big|_{\omega=\omega_0} (\Delta\omega)^3 \right\}
\end{aligned} \tag{B.8}$$

Nombrado

$$\begin{aligned}
a_1 &\equiv \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{n_0} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \\
a_2 &\equiv \frac{1}{\omega_0 n(\omega_0)} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2n(\omega_0)} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} \\
a_3 &\equiv \frac{1}{2\omega_0 n(\omega_0)} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{6n(\omega_0)} \frac{d^3n(\omega)}{d\omega^3} \Big|_{\omega=\omega_0}
\end{aligned}$$

Siendo $k_0 = \omega_0/c$, se puede expresar el número de onda como

$$k_\ell = k_0 n_0 \{ 1 + a_1 \Delta\omega + a_2 (\Delta\omega)^2 + a_3 (\Delta\omega)^3 \} \tag{B.9}$$

De manera análoga al apéndice A, se definen los términos b

$$\begin{aligned}
b_1 &= \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{n_0 - 1} \frac{d(n(\omega) - 1)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{1}{\omega_0} + \frac{1}{n_0 - 1} \frac{d(n(\omega))}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} \\
b_2 &= \frac{1}{\omega_0(n(\omega_0) - 1)} \frac{d(n(\omega) - 1)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2(n(\omega_0) - 1)} \frac{d^2(n(\omega) - 1)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} \\
&= \frac{1}{\omega_0(n(\omega_0) - 1)} \frac{dn(\omega)}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{2(n(\omega_0) - 1)} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} \\
b_3 &= \frac{1}{2\omega_0(n(\omega_0) - 1)} \frac{d^2(n(\omega) - 1)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{6(n(\omega_0) - 1)} \frac{d^3(n(\omega) - 1)}{d\omega^3} \Big|_{\omega=\omega_0} \\
&= \frac{1}{2\omega_0(n(\omega_0) - 1)} \frac{d^2n(\omega)}{d\omega^2} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{6(n(\omega_0) - 1)} \frac{d^3n(\omega)}{d\omega^3} \Big|_{\omega=\omega_0}
\end{aligned}$$

Si consideramos que tenemos dos vidrios en un doblete, tendremos b_1^1 y b_1^2 que determinan las primeras derivadas para cada vidrio, así mismo b_2^1 y b_2^2 que determinan las segundas derivadas para cada vidrio y finalmente b_3^1 y b_3^2 que determinan las derivadas terceras para cada vidrio. Ahora, considerando que (B.5) es un término compuesto por dos términos, donde el primero está definido por:

$$E_1 = e^{i(k_{\ell 1}d_1 + k_{\ell 2}d_2)}$$

y el segundo:

$$E_2 = e^{-i(k_{\ell 1} - k_a)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1}\right)} e^{-i(k_{\ell 1} - k_a)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} e^{-i(k_{\ell 2} - k_a)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} e^{-i(k_{\ell 2} - k_a)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_3}\right)} \quad (\text{B.10})$$

haciendo un poco de álgebra podemos expresar cada uno de estos términos como:

$$E_1 = e^{i(k_{\ell 1}d_1 + k_{\ell 2}d_2)} = e^{ik_0(n_1d_1[1 + a_1^1\Delta\omega + a_2^1(\Delta\omega)^2 + a_3^1(\Delta\omega)^3] + n_2d_2[1 + a_1^2\Delta\omega + a_2^2(\Delta\omega)^2 + a_3^2(\Delta\omega)^3])} \quad (\text{B.11})$$

mientras que $k_{\ell} - k_a = k_0(n_0 - 1)[1 + b_1\Delta\omega + b_2\Delta\omega]$ por lo que el segundo término se puede expresar como:

$$\begin{aligned}
E_2 &= e^{-i(k_{\ell 1} - k_a)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1}\right) + i(k_{\ell 1} - k_a)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right) - i(k_{\ell 2} - k_a)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right) + i(k_{\ell 2} - k_a)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_3}\right)} \\
&= e^{-ik_0(n_{01} - 1)(1 + b_1^1\Delta\omega + b_2^1(\Delta\omega)^2 + b_3^1(\Delta\omega)^3)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_1}\right)} \\
&\times e^{ik_0(n_{01} - 1)(1 + b_1^1\Delta\omega + b_2^1(\Delta\omega)^2 + b_3^1(\Delta\omega)^3)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} \\
&\times e^{-ik_0(n_{02} - 1)(1 + b_1^2\Delta\omega + b_2^2(\Delta\omega)^2 + b_3^2(\Delta\omega)^3)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_2}\right)} \\
&\times e^{ik_0(n_{02} - 1)(1 + b_1^2\Delta\omega + b_2^2(\Delta\omega)^2 + b_3^2(\Delta\omega)^3)\left(\frac{x_1^2 + y_1^2}{2R_3}\right)} \quad (\text{B.12})
\end{aligned}$$

donde $n_{01} = n(\omega_0)$ para la lente 1 y $n_{02} = n(\omega_0)$ para la lente 2. El último término de (B.2) será nombrado como E_3

$$E_3 = e^{\frac{ik_a}{2z} \left((x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \right)} \quad (\text{B.13})$$

donde k_a , se expande en serie de Taylor hasta el primer orden, así que k_a queda definido por

$$k_a = \frac{\omega}{c} \Big|_{\omega=\omega_0} + \frac{1}{c} \frac{d\omega}{d\omega} \Big|_{\omega=\omega_0} (\omega - \omega_0) = \frac{\omega_0}{c} + \frac{\Delta\omega}{c} = \frac{\omega_0}{c} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) = k_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \quad (\text{B.14})$$

entonces podemos escribir a la ecuación (B.13) como

$$\begin{aligned} e^{\frac{ik_a}{2z} [(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]} &= e^{\frac{ik_0}{2z} (1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}) [(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2]} \\ &= e^{\frac{ik_0}{2z} (1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}) (x_2^2-2x_1x_2+x_1^2+y_2^2-2y_1y_2+y_1^2)} \\ &= e^{\frac{ik_0}{2z} (1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}) [(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)-2(x_1x_2+y_1y_2)]} \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

sustituyendo (B.11), (B.12) y (B.15) en (B.2), la amplitud del campo esta determinada por:

$$\begin{aligned} U(x_2, y_2, z, \Delta\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 P(x_1, y_1) U_0(x_1, y_1) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(x_1, y_1)} \\ &\times e^{ik_0(n_1 d_1 [1+a_1^1 \Delta\omega + a_2^1 (\Delta\omega)^2] + n_2 d_2 [1+a_1^2 \Delta\omega + a_2^2 (\Delta\omega)^2])} \\ &\times e^{-ik_0(n_{01}-1)(1+b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2 + b_3^1 (\Delta\omega)^3) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_1}\right)} \\ &\times e^{ik_0(n_{01}-1)(1+b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2 + b_3^1 (\Delta\omega)^3) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{-ik_0(n_{02}-1)(1+b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2 + b_3^2 (\Delta\omega)^3) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{ik_0(n_{02}-1)(1+b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2 + b_3^2 (\Delta\omega)^3) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_3}\right)} \\ &\times e^{\frac{ik_0}{2z} (1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}) [(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)-2(x_1x_2+y_1y_2)]} \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

de nuevo dividimos los términos en un conjunto de tres exponenciales, la primera es:

$$E_1 = e^{ik_0(n_1 d_1 [1+a_1^1 \Delta\omega + a_2^1 (\Delta\omega)^2 + a_3^1 (\Delta\omega)^3] + n_2 d_2 [1+a_1^2 \Delta\omega + a_2^2 (\Delta\omega)^2 + a_3^2 (\Delta\omega)^3])} \quad (\text{B.17})$$

la segunda

$$\begin{aligned} E_2 &= e^{-ik_0(n_{01}-1)(1+b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2 + b_3^1 (\Delta\omega)^3) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_1}\right)} \\ &\times e^{ik_0(n_{01}-1)(1+b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2 + b_3^1 (\Delta\omega)^3) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{-ik_0(n_{02}-1)(1+b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2 + b_3^2 (\Delta\omega)^3) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_2}\right)} \\ &\times e^{ik_0(n_{02}-1)(1+b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2 + b_3^2 (\Delta\omega)^3) \left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_3}\right)} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

y la tercera

$$E_3 = e^{\frac{ik_0}{2z} (1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}) [(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)-2(x_1x_2+y_1y_2)]} \quad (\text{B.19})$$

multiplicamos este último término por un 1, en la forma

$$1 = e^0 = e^{i\frac{k_0}{2f_0} (x_1^2+y_1^2) - i\frac{k_0}{2f_0} (x_1^2+y_1^2)}$$

de tal forma que (B.19) queda

$$E_3 = e^{\frac{ik_0}{2z}(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0})[(x_1^2+y_1^2)+(x_2^2+y_2^2)-2(x_1x_2+y_1y_2)]} e^{i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)-i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)} \quad (\text{B.20})$$

reagrupando términos obtenemos

$$\begin{aligned} E_3 &= e^{\frac{ik_0}{2z}(x_1^2+y_1^2)} \underbrace{e^{\frac{ik_0}{2z}(\frac{\Delta\omega}{\omega_0})(x_1^2+y_1^2)}}_a \\ &\times e^{\frac{ik_0}{2z}(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0})[(x_2^2+y_2^2)-2(x_1x_2+y_1y_2)]} \underbrace{e^{i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)}}_b e^{-i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.21})$$

los términos (a) y (b) se colocan dentro de la segunda exponencial E_2 , tal que

$$\begin{aligned} E_2 &= e^{-ik_0(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2+b_3^1(\Delta\omega)^3)(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_1})} \\ &\times e^{ik_0(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2+b_3^1(\Delta\omega)^3)(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_2})} \\ &\times e^{-ik_0(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2+b_3^2(\Delta\omega)^3)(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_1})} \\ &\times e^{ik_0(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2+b_3^2(\Delta\omega)^3)(\frac{x_1^2+y_1^2}{2R_3})} \\ &\times e^{\frac{ik_0}{2z}(\frac{\Delta\omega}{\omega_0})(x_1^2+y_1^2)} e^{i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

de tal manera que la tercer exponencial queda definida por:

$$\begin{aligned} E_3 &= e^{\frac{ik_0}{2z}(x_1^2+y_1^2)} e^{\frac{ik_0}{2z}(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0})[(x_2^2+y_2^2)-2(x_1x_2+y_1y_2)]} e^{-i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)} \\ &= e^{\frac{ik_0}{2z}(x_1^2+y_1^2)} e^{ik_0(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0})\left[\frac{x_2^2+y_2^2}{2z}-\frac{x_1x_2+y_1y_2}{z}\right]} e^{-i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)} \end{aligned} \quad (\text{B.23})$$

se consideran las siguientes aproximaciones:

$$\frac{x_2^2+y_2^2}{2z} \approx \frac{x_2^2+y_2^2}{2f_0} \quad \text{y} \quad \frac{x_1x_2+y_1y_2}{z} = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{f_0} \quad (\text{B.24})$$

debido a estas, rrescribimos el término E_3

$$E_3 = e^{\frac{ik_0}{2z}(x_1^2+y_1^2)} e^{ik_0(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0})\left[\frac{x_2^2+y_2^2}{2f_0}-\frac{x_1x_2+y_1y_2}{f_0}\right]} e^{-i\frac{k_0}{2f_0}(x_1^2+y_1^2)} \quad (\text{B.25})$$

La potencia de la lente simple esta dada por:

$$\frac{1}{f_0} = (n_0 - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{B.26})$$

mientras que la potencia del doblete esta dado en términos del índice de refracción y los radios de curvatura mediante la expresión

$$\frac{1}{f_0} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = (n_{01} - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + (n_{02} - 1)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_3}\right) \quad (\text{B.27})$$

entonces el término E_2 se puede expresar por:

$$\begin{aligned} E_2 &= e^{-ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\frac{(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2+b_3^1(\Delta\omega)^3)}{R_1}} e^{ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\frac{(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2+b_3^1(\Delta\omega)^3)}{R_2}} \\ &\times e^{-ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\frac{(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2+b_3^2(\Delta\omega)^3)}{R_2}} e^{ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\frac{(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2+b_3^2(\Delta\omega)^3)}{R_3}} \\ &\times e^{ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{1}{z}} e^{ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\frac{1}{f_0}}} \\ &= e^{-ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\frac{(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2+b_3^1(\Delta\omega)^3)}{R_1}} e^{ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\frac{(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2+b_3^1(\Delta\omega)^3)}{R_2}} \\ &\times e^{-ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\frac{(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2+b_3^2(\Delta\omega)^3)}{R_2}} e^{ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\frac{(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2+b_3^2(\Delta\omega)^3)}{R_3}} \\ &\times e^{ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{1}{z}} e^{ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\left\{(n_{01}-1)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+(n_{02}-1)\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{R_3}\right)\right\}}} \\ &= e^{-ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\frac{(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2+b_3^1(\Delta\omega)^3)}{R_1}} e^{ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\frac{(n_{01}-1)(1+b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2+b_3^1(\Delta\omega)^3)}{R_2}} \\ &\times e^{-ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\frac{(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2+b_3^2(\Delta\omega)^3)}{R_2}} e^{ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\frac{(n_{02}-1)(1+b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2+b_3^2(\Delta\omega)^3)}{R_3}} \\ &\times e^{ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{1}{z}} e^{ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\left\{\frac{(n_{01}-1)}{R_1}-\frac{(n_{01}-1)}{R_2}+\frac{(n_{02}-1)}{R_2}-\frac{(n_{02}-1)}{R_3}\right\}}} \\ &= e^{-ik_0\left(\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right)\left\{\frac{(n_{01}-1)(b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2+b_3^1(\Delta\omega)^3)}{R_1}-\frac{(n_{01}-1)(b_1^1\Delta\omega+b_2^1(\Delta\omega)^2+b_3^1(\Delta\omega)^3)}{R_2}\right.} \\ &\quad \left.+\frac{(n_{02}-1)(b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2+b_3^2(\Delta\omega)^3)}{R_2}-\frac{(n_{02}-1)(b_1^2\Delta\omega+b_2^2(\Delta\omega)^2+b_3^2(\Delta\omega)^3)}{R_3}-\left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{1}{z}}\right\}} \end{aligned} \quad (\text{B.28})$$

Debido a la simetría circular de la lente, se hace un cambio de coordenadas a coordenadas polares para describir la lente y el plano focal

Coord. de la lente	Coord. del plano focal
$x_1 = r_1 \cos \theta$	$x_2 = r_2 \cos \varphi$
$y_1 = r_1 \sen \theta$	$y_2 = r_2 \sen \varphi$

al considerar este cambio de coordenadas la función que describe la pupila queda definida por

$$P(r, \theta) = \begin{cases} 1 & x_1^2 + y_1^2 = r_1^2 = (\rho r)^2 \\ 0 & \text{otro caso} \end{cases} \quad (\text{B.29})$$

donde ρ es el semidiámetro de la lente. Tomando solo estas consideraciones, hacemos el cambio de coordenadas cartesianas a polares

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \int_{-\infty}^{\infty} dy_1 = \int_0^{\infty} r dr \int_0^{2\pi} d\theta P(r, \theta) = \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta \quad (\text{B.30})$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión del campo, encontramos

$$\begin{aligned}
U(z, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr \int_0^{2\pi} d\theta U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
&\times e^{ik_0(n_1 d_1 [1+a_1^1 \Delta\omega + a_2^1 (\Delta\omega)^2 + a_3^1 (\Delta\omega)^3] + n_2 d_2 [1+a_1^2 \Delta\omega + a_2^2 (\Delta\omega)^2 + a_3^2 (\Delta\omega)^3])} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right) \left\{ \frac{(n_{01}-1)(b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2 + b_3^1 (\Delta\omega)^3)}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)(b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2 + b_3^1 (\Delta\omega)^3)}{R_2} \right.} \\
&\quad \left. + \frac{(n_{02}-1)(b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2 + b_3^2 (\Delta\omega)^3)}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)(b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2 + b_3^2 (\Delta\omega)^3)}{R_3} - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \frac{1}{z} \right\}} \\
&\times e^{ik_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \left\{ \frac{r_2^2}{2f_0} - \frac{(\rho r)r_2 \cos \theta \cos \varphi + (\rho r)r_2 \sin \theta \sin \varphi}{f_0} \right\}} \\
&e^{-\frac{ik_0}{2} (\rho r)^2 \left(\frac{1}{f_0} - \frac{1}{z}\right)} \tag{B.31}
\end{aligned}$$

Considerando sólo la parte angular, podemos ver que esta es una expresión conocida, la función de orden cero de Bessel

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} d\theta e^{-i \frac{k_0}{f_0} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) (\rho r r_2) (\cos \theta \cos \varphi)} &= \int_0^{2\pi} d\theta e^{-i \frac{k_0}{f_0} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) (\rho r r_2) (\cos(\theta - \varphi))} \\
&= J_0 \left(\frac{k_0}{f_0} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) (\rho r r_2) \right) \tag{B.32}
\end{aligned}$$

Así que el campo queda definido por:

$$\begin{aligned}
U(z, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
&\times e^{ik_0(n_1 d_1 [1+a_1^1 \Delta\omega + a_2^1 (\Delta\omega)^2 + a_3^1 (\Delta\omega)^3] + n_2 d_2 [1+a_1^2 \Delta\omega + a_2^2 (\Delta\omega)^2 + a_3^2 (\Delta\omega)^3])} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right) \left\{ \frac{(n_{01}-1)(b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2 + b_3^1 (\Delta\omega)^3)}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)(b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2 + b_3^1 (\Delta\omega)^3)}{R_2} \right.} \\
&\quad \left. + \frac{(n_{02}-1)(b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2 + b_3^2 (\Delta\omega)^3)}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)(b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2 + b_3^2 (\Delta\omega)^3)}{R_3} - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \frac{1}{z} \right\}} \\
&\times e^{ik_0 \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) \frac{r_2^2}{2f_0}} e^{-\frac{ik_0}{2} (\rho r)^2 \left(\frac{1}{f_0} - \frac{1}{z}\right)} J_0 \left(\frac{k_0}{f_0} \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right) (\rho r r_2) \right) \tag{B.33}
\end{aligned}$$

Ahora se reescribe tomando en cuenta las coordenadas ópticas, donde

$$u \equiv \rho^2 k_0 \left(\frac{1}{f_0} - \frac{1}{z} \right), \quad v \equiv \frac{\rho r_2 k_0}{f_0}, \quad N = \frac{\rho^2 k_0}{2f_0} \tag{B.34}$$

por lo que (B.33) se puede reescribir

$$\begin{aligned}
U(u, v, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
&\times e^{ik_0(n_1 d_1 [1+a_1^1 \Delta\omega + a_2^1 (\Delta\omega)^2 + a_3^1 (\Delta\omega)^3] + n_2 d_2 [1+a_1^2 \Delta\omega + a_2^2 (\Delta\omega)^2 + a_3^2 (\Delta\omega)^3])} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right)} \left\{ \frac{(n_{01}-1)(b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2 + b_3^1 (\Delta\omega)^3)}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)(b_1^1 \Delta\omega + b_2^1 (\Delta\omega)^2 + b_3^1 (\Delta\omega)^3)}{R_2} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(n_{02}-1)(b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2 + b_3^2 (\Delta\omega)^3)}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)(b_1^2 \Delta\omega + b_2^2 (\Delta\omega)^2 + b_3^2 (\Delta\omega)^3)}{R_3} - \left(\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)^{\frac{1}{z}} \right\} \\
&\times e^{i\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\frac{v^2}{4N}} e^{-\frac{ir^2 u}{2}} J_0\left(vr\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right) \tag{B.35}
\end{aligned}$$

a partir de esta expresión se agrupan los términos con $\Delta\omega$, $(\Delta\omega)^2$ y $(\Delta\omega)^3$

$$\begin{aligned}
U(u, v, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
&\times e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2) + ik_0 \Delta\omega (n_1 d_1 a_1^1 + n_2 d_2 a_1^2) + ik_0 (\Delta\omega)^2 (n_1 d_1 a_2^1 + n_2 d_2 a_2^2) + ik_0 (\Delta\omega)^3 (n_1 d_1 a_3^1 + n_2 d_2 a_3^2)} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right)} \left\{ \Delta\omega \left(\frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_3} - \frac{1}{z\omega_0} \right) \right\} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right)} \left\{ (\Delta\omega)^2 \left(\frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_3} \right) \right\} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right)} \left\{ (\Delta\omega)^3 \left(\frac{(n_{01}-1)b_3^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_3^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_3^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_3^2}{R_3} \right) \right\} \\
&\times e^{i\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\frac{v^2}{4N}} e^{-\frac{ir^2 u}{2}} J_0\left(vr\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right) \tag{B.36}
\end{aligned}$$

Se suma y resta la cantidad $k_0 \rho^2 / 2 f_0 \omega_0$ en la exponencial que contiene al término $\Delta\omega$

$$\begin{aligned}
U(u, v, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
&\times e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2) + ik_0 \Delta\omega (n_1 d_1 a_1^1 + n_2 d_2 a_1^2) + ik_0 (\Delta\omega)^2 (n_1 d_1 a_2^1 + n_2 d_2 a_2^2)} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right)} \left\{ \Delta\omega \left(\frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_3} - \frac{1}{z\omega_0} \right) \right\} \\
&\times e^{-ir^2 \Delta\omega \left(\frac{k_0 \rho^2}{2f_0 \omega_0} - \frac{k_0 \rho^2}{2f_0 \omega_0}\right)} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right)} \left\{ (\Delta\omega)^2 \left(\frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_3} \right) \right\} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{(\rho r)^2}{2}\right)} \left\{ (\Delta\omega)^3 \left(\frac{(n_{01}-1)b_3^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_3^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_3^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_3^2}{R_3} \right) \right\} \\
&\times e^{i\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\frac{v^2}{4N}} e^{-\frac{ir^2 u}{2}} J_0\left(vr\left(1+\frac{\Delta\omega}{\omega_0}\right)\right) \tag{B.37}
\end{aligned}$$

reescribiendo estos términos

$$\begin{aligned}
U(u, v, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
&\times e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2) + ik_0 \Delta\omega (n_1 d_1 a_1^1 + n_2 d_2 a_1^2) + ik_0 (\Delta\omega)^2 (n_1 d_1 a_2^1 + n_2 d_2 a_2^2)} \\
&\times e^{-ir^2 \Delta\omega \left\{ \frac{k_0 \rho^2}{2} \left(\frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_3} \right) + \frac{k_0 \rho^2}{2\omega_0} \left[\frac{1}{f_0} - \frac{1}{z} \right] - \frac{k_0 \rho^2}{2\omega_0} \right\}} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{\rho r}{2} \right)^2 \left\{ (\Delta\omega)^2 \left(\frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_3} \right) \right\}} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{\rho r}{2} \right)^2 \left\{ (\Delta\omega)^3 \left(\frac{(n_{01}-1)b_3^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_3^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_3^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_3^2}{R_3} \right) \right\}} \\
&\times e^{i(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}) \frac{v^2}{4N}} e^{-\frac{ir^2 u}{2}} J_0 \left(vr \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \right) \tag{B.38}
\end{aligned}$$

haciendo el cambio a coordenadas ópticas, se tiene

$$\begin{aligned}
U(u, v, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} \\
&\times e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2) + ik_0 \Delta\omega (n_1 d_1 a_1^1 + n_2 d_2 a_1^2) + ik_0 (\Delta\omega)^2 (n_1 d_1 a_2^1 + n_2 d_2 a_2^2)} \\
&\times e^{-ir^2 \Delta\omega \left\{ \frac{k_0 \rho^2}{2} \left(\frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_3} \right) + \frac{u}{2\omega_0} - \frac{k_0 \rho^2}{2\omega_0} \right\}} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{\rho r}{2} \right)^2 \left\{ (\Delta\omega)^2 \left(\frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_3} \right) \right\}} \\
&\times e^{-ik_0 \left(\frac{\rho r}{2} \right)^2 \left\{ (\Delta\omega)^3 \left(\frac{(n_{01}-1)b_3^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_3^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_3^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_3^2}{R_3} \right) \right\}} \\
&\times e^{i(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0}) \frac{v^2}{4N}} e^{-\frac{ir^2 u}{2}} J_0 \left(vr \left(1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right) \right) \tag{B.39}
\end{aligned}$$

Definimos:

$$\begin{aligned}
\tau' &\equiv k_0(n_1 d_1 a_1^1 + n_2 d_2 a_1^2) \\
\delta' &\equiv k_0(n_1 d_1 a_2^1 + n_2 d_2 a_2^2) \\
\gamma' &\equiv k_0(n_1 d_1 a_3^1 + n_2 d_2 a_3^2) \\
\tau &\equiv \frac{k_0 \rho^2}{2} \left(\frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_1^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_1^2}{R_3} \right) - \left(\frac{k_0 \rho^2}{2\omega_0 f_0} - \frac{u}{2\omega_0} \right) \\
\delta &\equiv \frac{\rho^2 k_0}{2} \left(\frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_2^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_2^2}{R_3} \right) \\
\gamma &\equiv \frac{\rho^2 k_0}{2} \left(\frac{(n_{01}-1)b_3^1}{R_1} - \frac{(n_{01}-1)b_3^1}{R_2} + \frac{(n_{02}-1)b_3^2}{R_2} - \frac{(n_{02}-1)b_3^2}{R_3} \right)
\end{aligned}$$

Sustituyendo estas definiciones, y considerando que $\Delta\omega/\omega_0 \rightarrow 0$, el campo queda descrito por

$$\begin{aligned}
U(u, v, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) A(\Delta\omega) e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} \\
&\times e^{i\Delta\omega(\tau' - r^2 \tau)} e^{i(\Delta\omega)^2(\delta' - r^2 \delta)} e^{i(\Delta\omega)^3(\gamma' - r^2 \gamma)} e^{i\left(\frac{v^2}{4N} - \frac{r^2 u}{2}\right)} J_0(vr) \tag{B.40}
\end{aligned}$$

Siendo los pulsos considerados gaussianos, la amplitud del campo se puede expresar como

$$A(\Delta\omega) = A_0 e^{-\left(\frac{T\Delta\omega}{2}\right)^2}$$

sustituyendo la amplitud del campo en la expresión anterior

$$\begin{aligned} U(u, v, \Delta\omega) &= \int_0^1 r dr U_0(r) e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} \\ &\times e^{i\Delta\omega(\tau' - r^2\tau)} e^{-(\Delta\omega)^2 \left[\frac{T^2}{4} - i(\delta' - r^2\delta)\right]} e^{i(\Delta\omega)^3(\gamma' - r^2\gamma)} e^{i\left(\frac{v^2}{4N} - \frac{r^2 u}{2}\right)} J_0(vr) \end{aligned} \quad (\text{B.41})$$

Para obtener el campo en el plano focal, se hace la transformada de Fourier

$$U(r, u, v, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) e^{-i(\Delta\omega)t} U(r, u, v, z, \Delta\omega) \quad (\text{B.42})$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} U(u, v, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) e^{-i(\Delta\omega)t} \int_0^1 r dr U_0(r) e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} \\ &\times e^{i\Delta\omega(\tau' - r^2\tau)} e^{-(\Delta\omega)^2 \left[\frac{T^2}{4} - i(\delta' - r^2\delta)\right]} e^{i(\Delta\omega)^3(\gamma' - r^2\gamma)} e^{i\left(\frac{v^2}{4N} - \frac{r^2 u}{2}\right)} J_0(vr) \end{aligned} \quad (\text{B.43})$$

reescribiendo

$$\begin{aligned} U(u, v, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} d(\Delta\omega) \int_0^1 r dr U_0(r) e^{-i\Theta(r)} e^{ik_0(n_1 d_1 + n_2 d_2)} \\ &\times e^{-i\Delta\omega(t - \tau' + r^2\tau)} e^{-(\Delta\omega)^2 \left[\frac{T^2}{4} - i(\delta' - r^2\delta)\right]} e^{i(\Delta\omega)^3(\gamma' - r^2\gamma)} e^{i\left(\frac{v^2}{4N} - \frac{r^2 u}{2}\right)} J_0(vr) \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Esta es la integral que ha sido programada, para obtener el campo en la vecindad del foco paraxial considerando la expansión del número de onda, hasta el tercer orden.

Características físicas de las lentes

Características de lentes y dobles de semidiámetro $a=6\text{mm}$, $\lambda = 810\text{nm}$								
Nombre	Vidrios	f(mm)	NA	R_1 (mm)	R_2 (mm)	R_3 (mm)	t_1 (mm)	t_2 (mm)
Lente Simple	BK7	30	0.20	15.5	1×10^{40}	1×10^{40}	3	0
Lente Simple	BK7	40	0.15	20.43	1×10^{40}	1×10^{40}	3	0
Doblete Acromático	LaK22-SF6	18	0.33	12.0	-8.65	-37.28	8.0	2.5
Doblete Acromático	LaK22-SF6	20	0.30	13.13	-9.59	-45.11	8.0	2.5
Doblete Acromático	LaK22-SF6	25	0.24	15.55	-13.75	-84.13	4.5	2.5
Doblete Acromático	LaK22-SF6	30	0.20	17.77	-16.46	-136.80	4.5	2.5
Doblete Acromático	LaK22-SF6	40	0.15	22.81	-21.91	-250.49	4.5	2.5
Doblete Apocromático*	FK51-KZFSN2	40	0.15	16.94	-13.69	-437.98	4.5	2.5
Doblete Apocromático*	FK51-KZFSN2	40	0.15	28.99	-10.62	-39.94	6.0	3.0
Doblete Apocromático*	CAF2-LAFN21	40	0.15	15.48	-17.99	-47.37	6.0	3.0
Doblete Apocromático*	FK51-K10	40	0.15	23.90	-8.36	-70.19	6.0	3.0
Doblete Apocromático*	CAF2-BAK1	40	0.15	15.05	-14.13	-99.16	6.0	3.0
Doblete Apocromático*	CAF2-BALF4	40	0.15	19.37	-15.16	-44.80	6.0	3.0

Figura C.1: Características de los sistemas estudiados.

Las lentes marcadas con * en (C.1), son dobles apocromáticos diseñados por la Dra. Martha Rosete, en el intervalo (750nm, 1100nm), del espectro electromagnético. Por lo que la luz de longitud de onda $\lambda = 810\text{nm}$, $\lambda = 750\text{nm}$ y $\lambda = 1100\text{nm}$, coinciden en el foco paraxial.

Coeficientes de Sellmeier						
Vidrio	B_1	B_2	B_3	C_1	C_2	C_3
BK7	1.0396121	$2.31792344 \times 10^{-1}$	1.01046945	$6.00069867 \times 10^{-3}$	$2.00179144 \times 10^{-2}$	1.03560653×10^2
LaK22	1.14229781	$5.35138441 \times 10^{-1}$	1.04088385	$5.85778594 \times 10^{-3}$	$1.98546147 \times 10^{-2}$	1.00834017×10^2
SF6	1.77931763	$3.38149866 \times 10^{-1}$	2.08734474	$1.33714182 \times 10^{-2}$	$6.17533621 \times 10^{-2}$	1.74017590×10^2
K10	1.15687082	$6.42625444 \times 10^{-2}$	$8.72376139 \times 10^{-1}$	$8.09424251 \times 10^{-3}$	$3.86051284 \times 10^{-2}$	1.04747730×10^2
BAK1	1.12365662	$3.09276848 \times 10^{-1}$	$8.81511957 \times 10^{-1}$	$6.44742752 \times 10^{-3}$	$2.22284402 \times 10^{-2}$	1.07297751×10^2
LAFN21	1.88298347	$2.40214668 \times 10^{-1}$	1.23537623	$9.36029744 \times 10^{-3}$	$3.54026371 \times 10^{-2}$	8.43919934×10^1
BALF4	1.29375981	$1.58138572 \times 10^{-1}$	$9.47442773 \times 10^{-1}$	$7.80228251 \times 10^{-3}$	$3.21349048 \times 10^{-2}$	1.09158657×10^2
KZFSN2	1.26169705	$1.28881191 \times 10^{-1}$	$8.98521214 \times 10^{-1}$	$7.67420045 \times 10^{-3}$	$3.30129627 \times 10^{-2}$	7.08271139×10^1

Figura C.2: Constantes de Sellmeier para la fórmula de dispersión, obtenidos del catálogo de Schott [97].

APÉNDICE **D**

Perfil de intensidad para los pulsos de 10fs que se han propagado por los dobletes acromáticos estudiados en el capítulo 4

En este apéndice se muestran las distribuciones de intensidad para los pulsos que han sido enfocados con ayuda de los doblete acromático compuesto por los vidrios LaK22-SF6, con diferentes distancias focales, todos con un semidiámetro igual a 6mm, tomados del catálogo de Schott [97]. La duración del pulso se ha tomado a partir del perfil de intensidad a $1/e$.

En cada lista de pulsos, se aprecia el pulso a $-400\mu\text{m}$, hacia la lente, esta medida se hace a partir del foco paraxial, el signo negativo indica que nos hemos acercado a la lente. De la misma manera apreciamos los pulsos a $-200\mu\text{m}$, $0\mu\text{m}$, $+200\mu\text{m}$ y $+400\mu\text{m}$, las distancias positivas indican posiciones alejadas de la lente medidas a partir del foco paraxial.

Se ha estudiado el efecto que tiene la aberración esférica, el efecto de PTD y GVD de manera independiente y después el resultado de todos estos efectos en la calidad de la señal de los pulsos. También se ha analizado la calidad de la señal de los pulsos cuando no hay ninguno de estos efectos, con lo que se determina como ésta ha sido afectada sólo por el desenfocamiento.

En todos los casos, la primer columna muestra el perfil de intensidad de los pulsos a diferentes distancias de desenfocamiento medidos a partir del foco paraxial. La segunda columna muestra el perfil de intensidad del pulso visto de arriba. La longitud de onda de la portadora es $\lambda = 810\text{nm}$, la iluminación es uniforme.

D.1. Doblete acromático de distancia focal $f_0=18\text{mm}$

$$f_0=18\text{mm}, A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=0$$

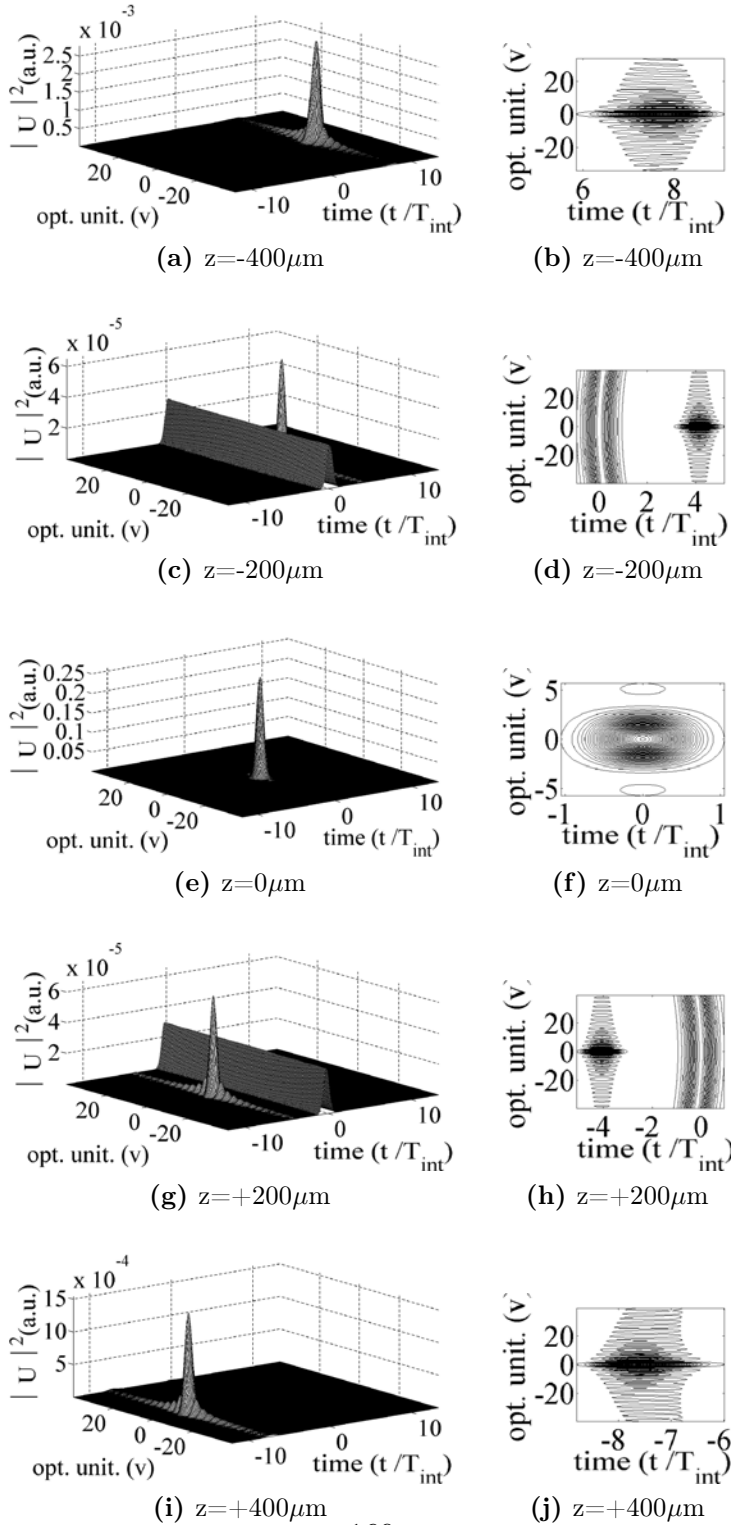


Figura D.1: Se muestra el perfil de intensidad de los pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=18\text{mm}$. en todos los casos se ha considerado que $A=0$, $\text{PTD}=0$, $\text{GVD}=0$, por lo que el efecto es sólo por el desenfocamiento.

$$f_0=18\text{mm}, A=1, \text{PTD}=0, \text{GVD}=0$$

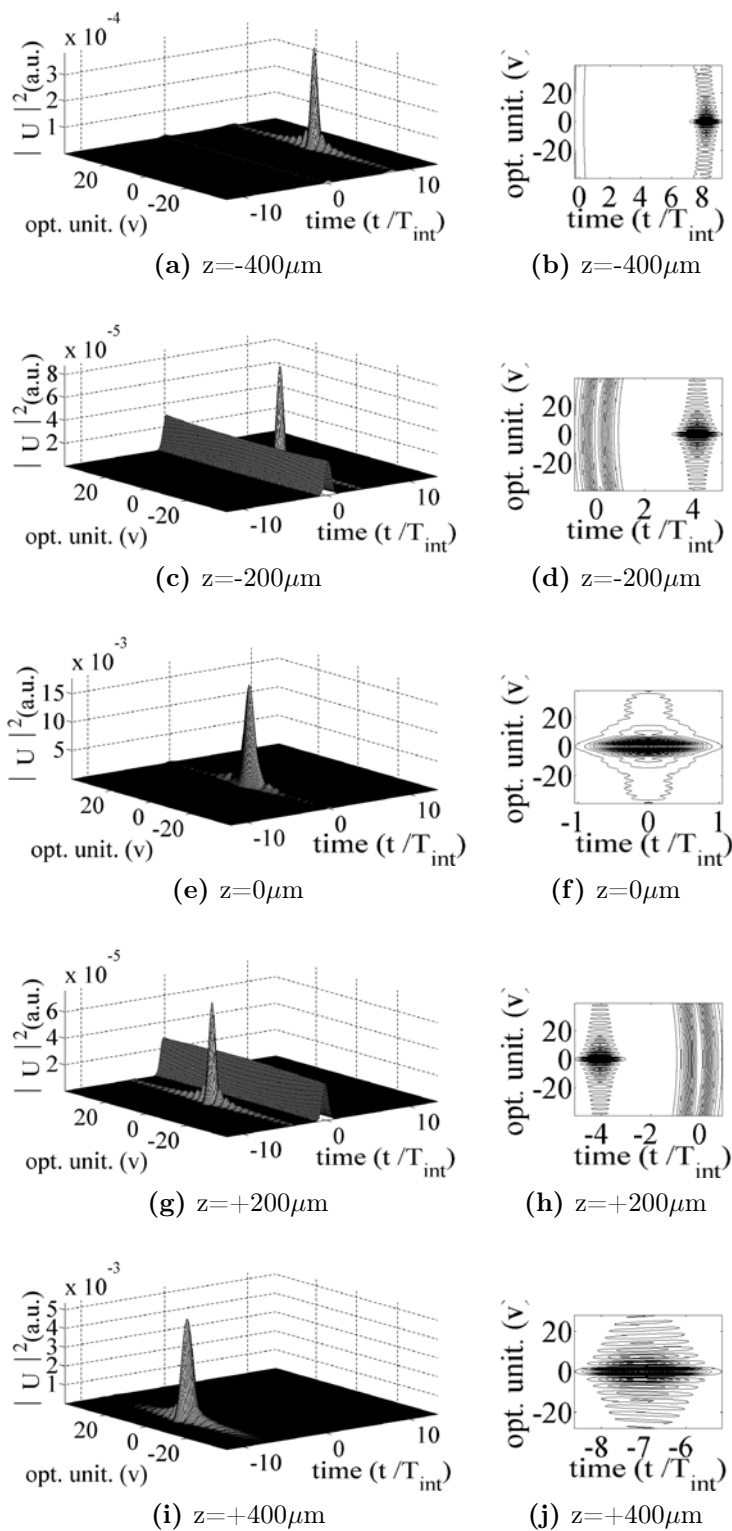


Figura D.2: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=18\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de la aberración cromática, i.e., $A=1, \text{PTD}=0, \text{GVD}=0$. 161

$$f_0=18\text{mm}, A=0, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$$

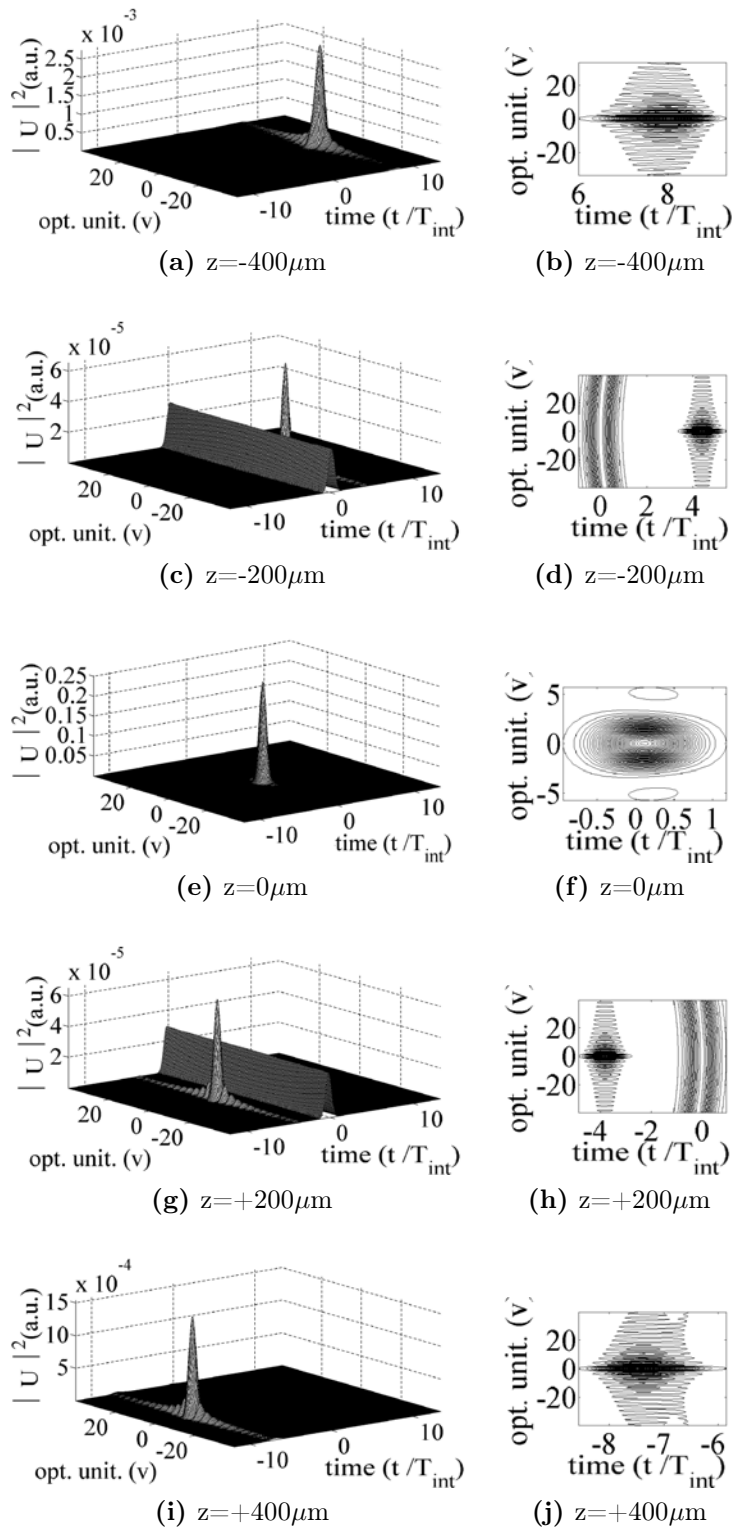


Figura D.3: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=18\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de PTD, i.e., $A=0, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$.

$$f_0=18\text{mm}, A=1, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$$

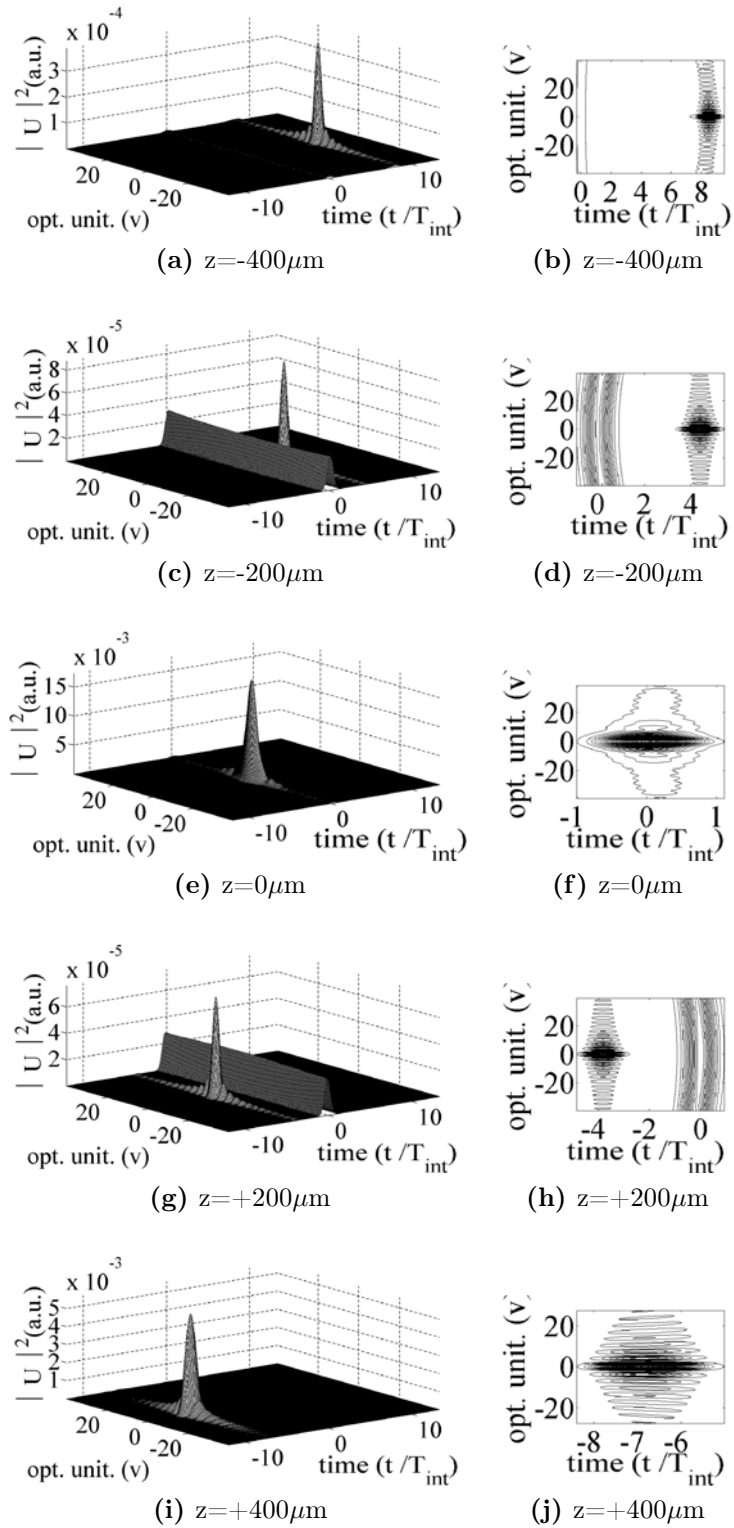


Figura D.4: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=18\text{mm}$, considerado el efecto de PTD y la aberración esférica, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=1$, $\text{GVD}=0$.

$$f_0=18\text{mm}, A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=1$$

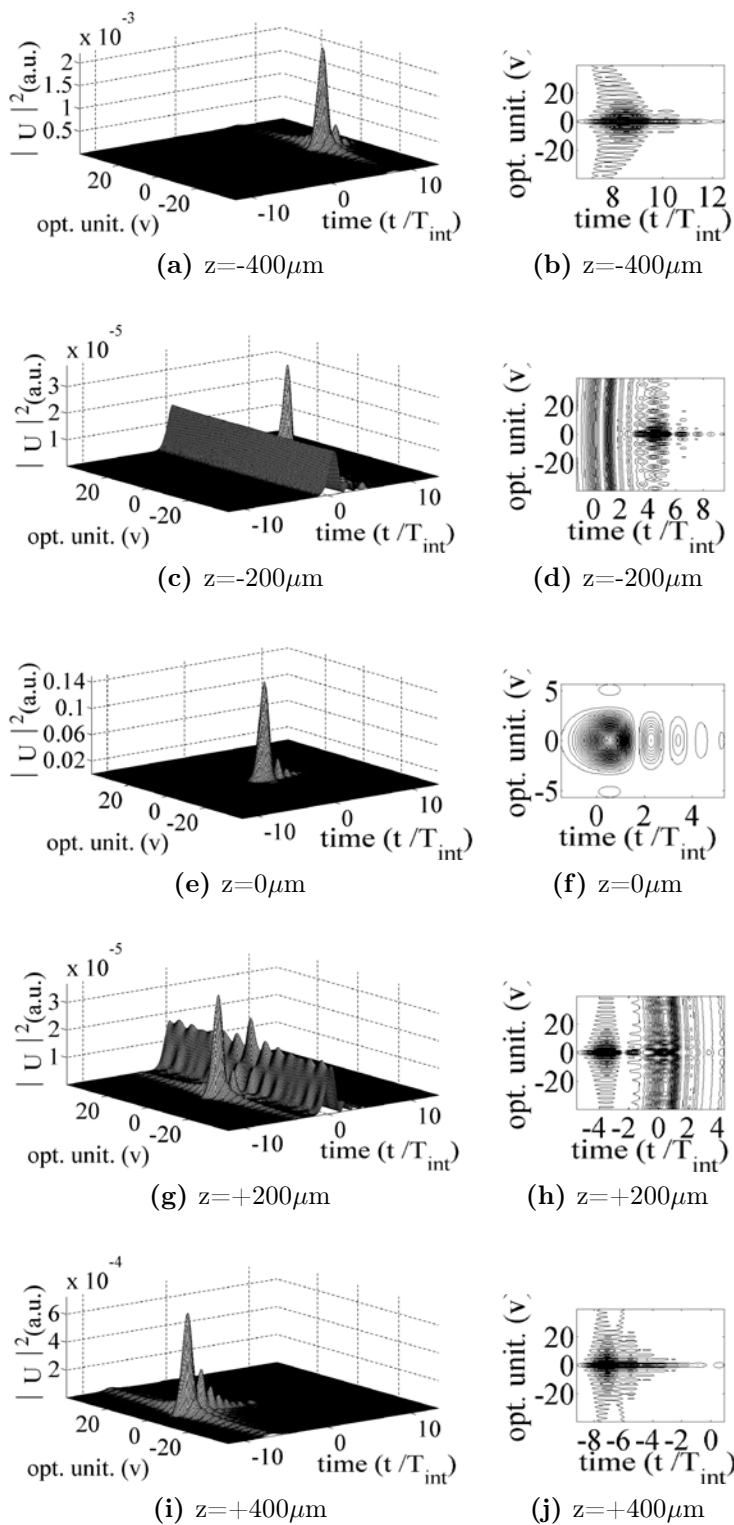


Figura D.5: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=18\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de GVD, i.e., $A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=1$.

$$f_0=18\text{mm}, A=1, \text{PTD}=1, \text{GVD}=1$$

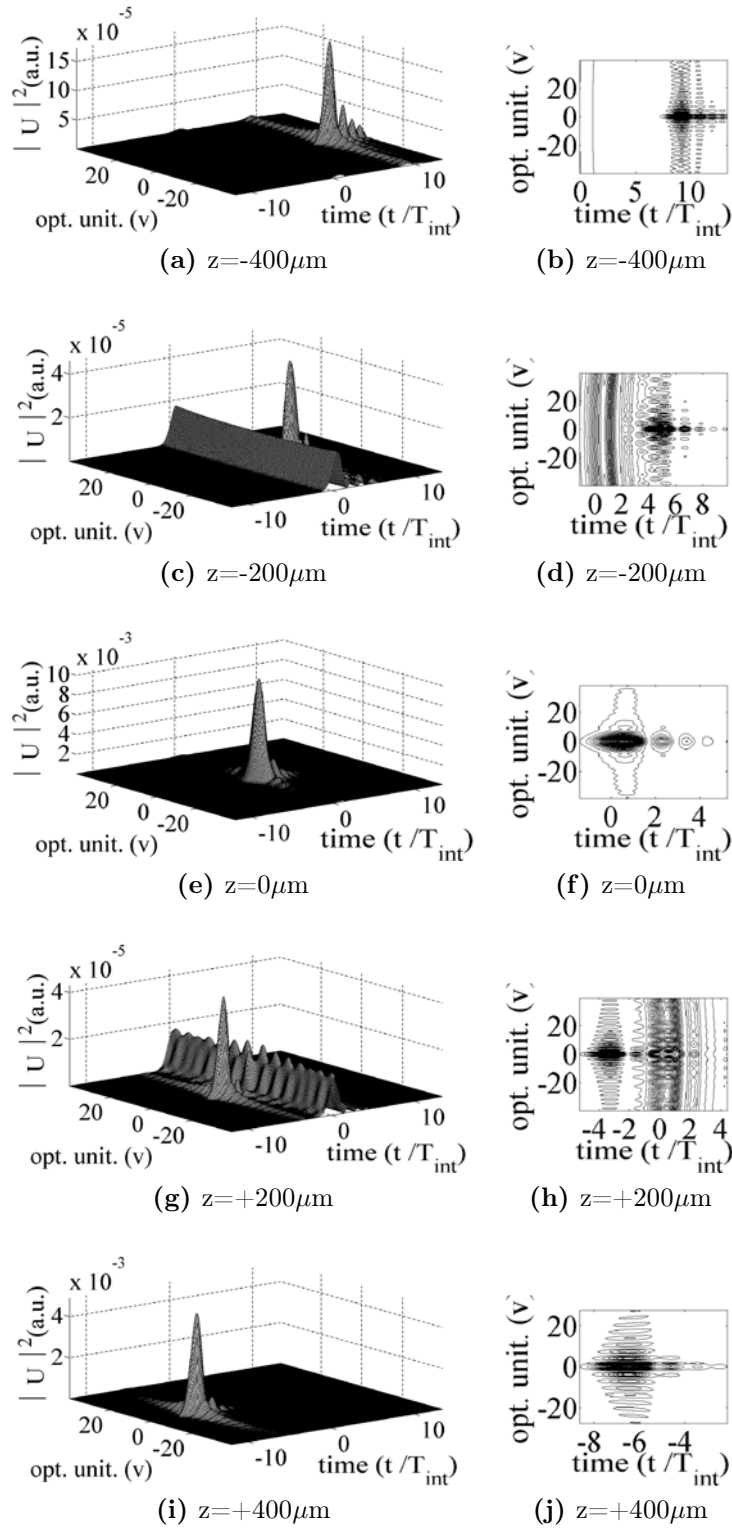


Figura D.6: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=18\text{mm}$, considerado los efectos de PTD, GVD y aberración esférica, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=1$, $\text{GVD}=1$. 165

D.2. Doblete acromático de distancia focal $f_0=20\text{mm}$

$f_0=20\text{mm}$, $A=0$, $\text{PTD}=0$, $\text{GVD}=0$

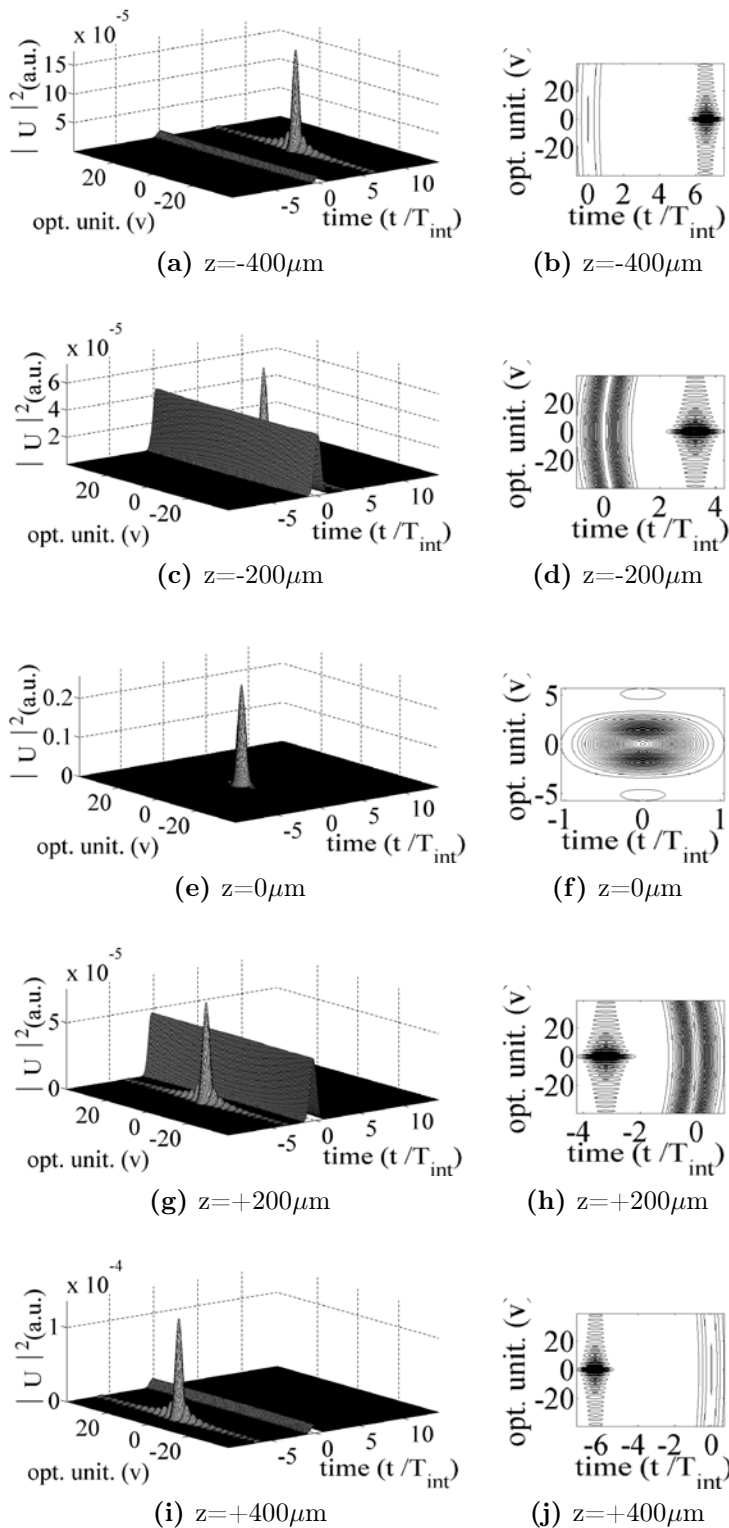


Figura D.7: Se muestra el perfil de intensidad de los pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=20\text{mm}$. en todos los casos se ha considerado que $A=0$, $\text{PTD}=0$, $\text{GVD}=0$, por lo que el efecto es sólo por el desenfocamiento.

$$f_0=20\text{mm}, A=1, \text{PTD}=0, \text{GVD}=0$$

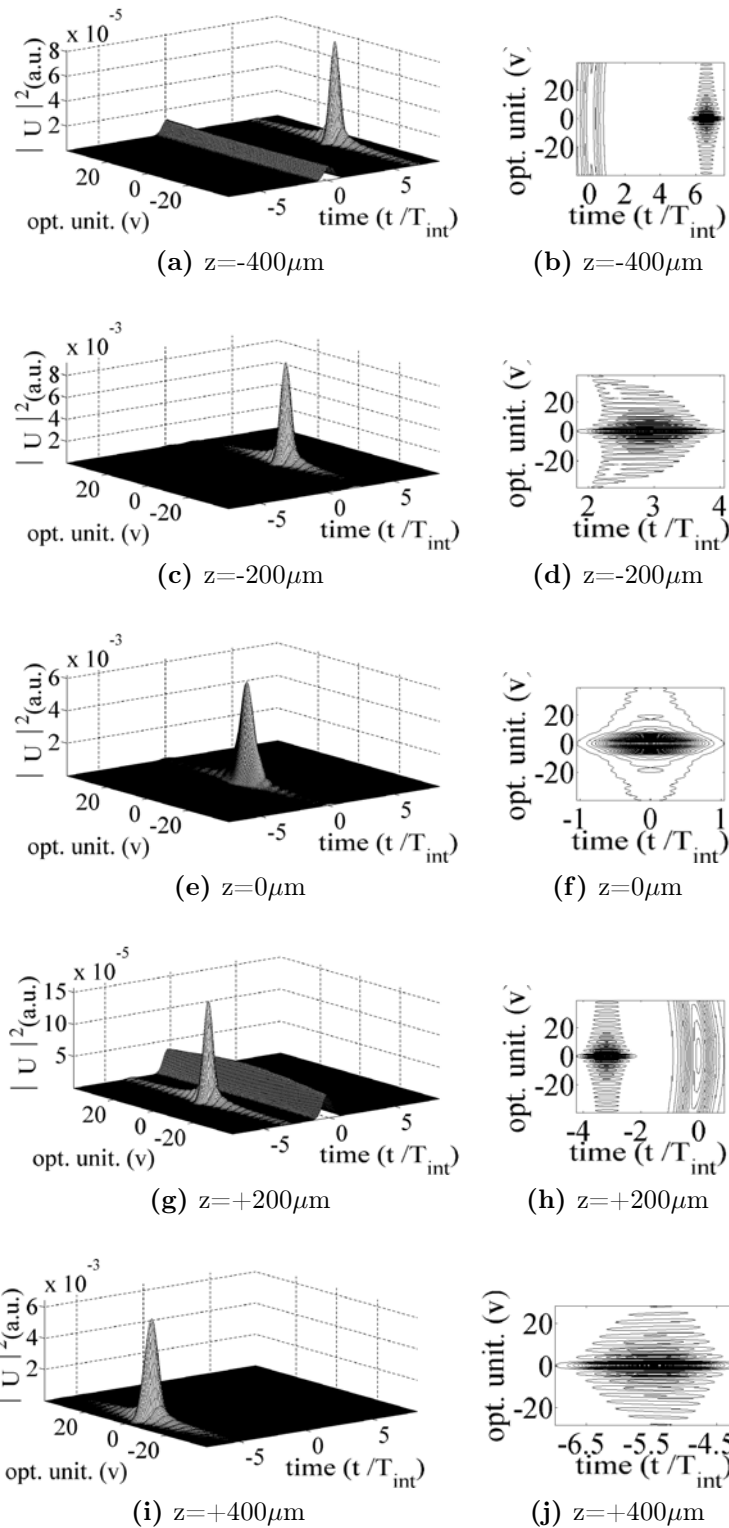


Figura D.8: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=20\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de la aberración cromática, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=0$, $\text{GVD}=0$. 167

$$f_0=20\text{mm}, A=0, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$$

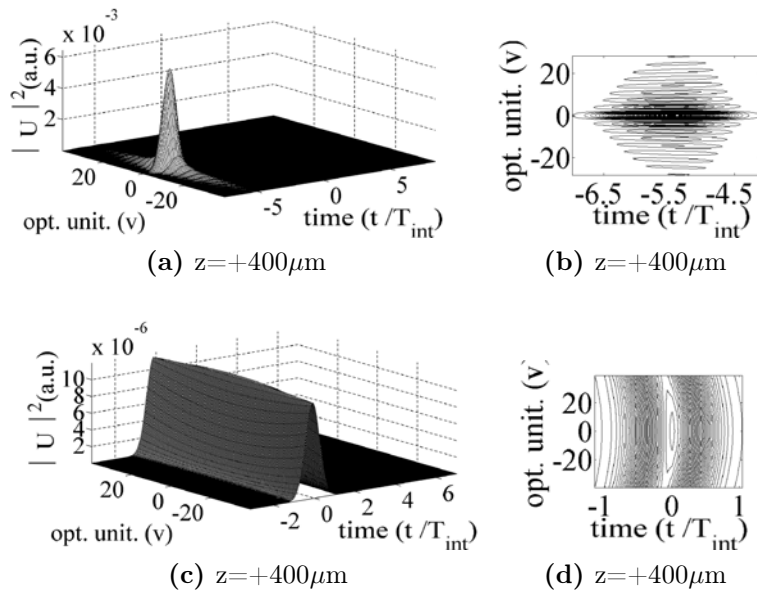


Figura D.9: Dada la diferencia de escalas entre el pulso principal y el boundary, en la figura no se pueden apreciar ambos pulsos. Cambiando la escala, podemos ver el pulso principal, el cual es 3 ordenes menor que el boundary. Se muestra el perfil de intensidad de los pulsos a la distancia $z + 400\mu\text{m}$ para $t=10\text{fs}$ que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=20\text{mm}$. Considerando $A=1$, $\text{PTD}=0$, $\text{GVD}=0$.

$$f_0=20\text{mm}, A=0, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$$

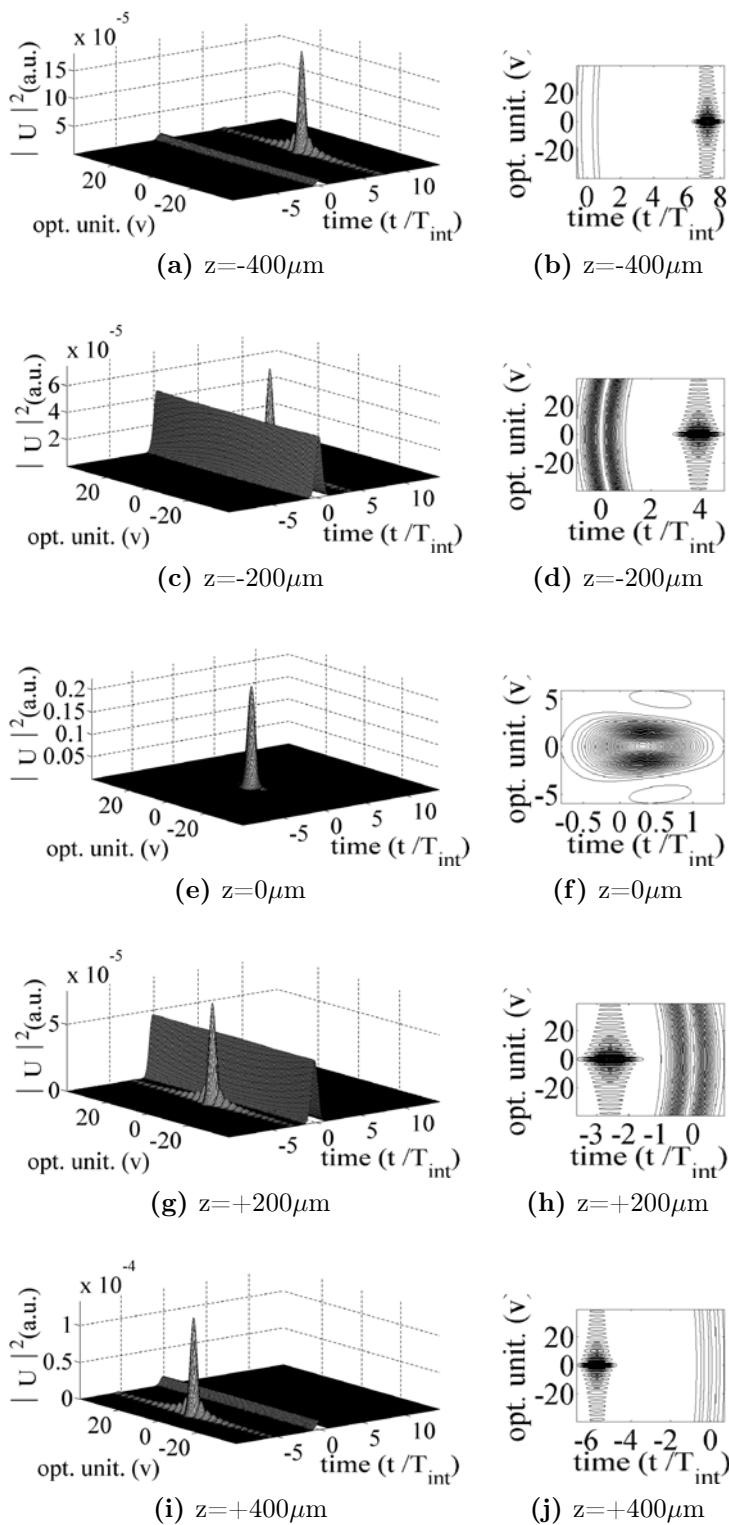


Figura D.10: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=20\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de PTD, i.e., $A=0, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$.

$$f_0=20\text{mm}, A=1, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$$

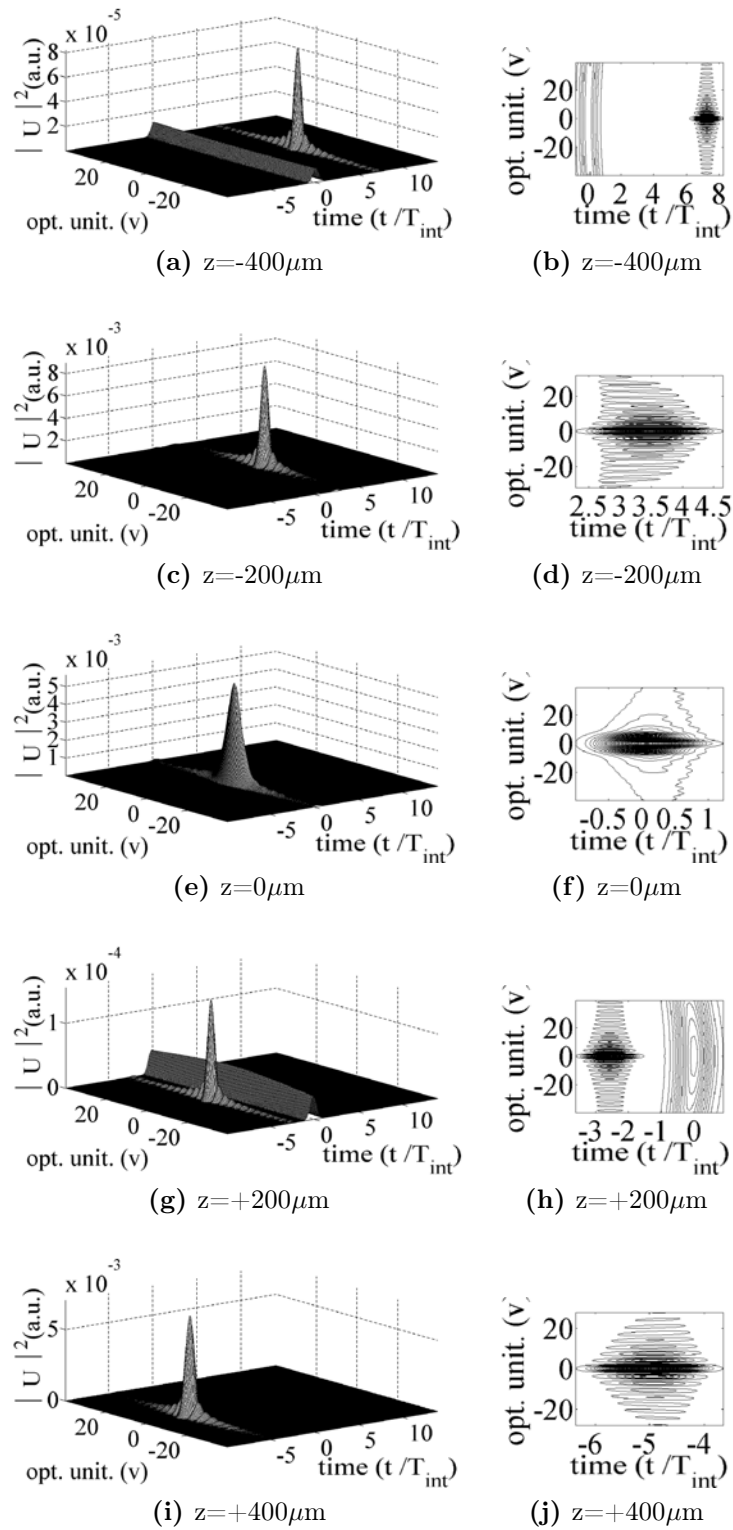


Figura D.11: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=20\text{mm}$, considerado el efecto de PTD y la aberración esférica, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=1$, $\text{GVD}=0$

$$f_0=20\text{mm}, A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=1$$

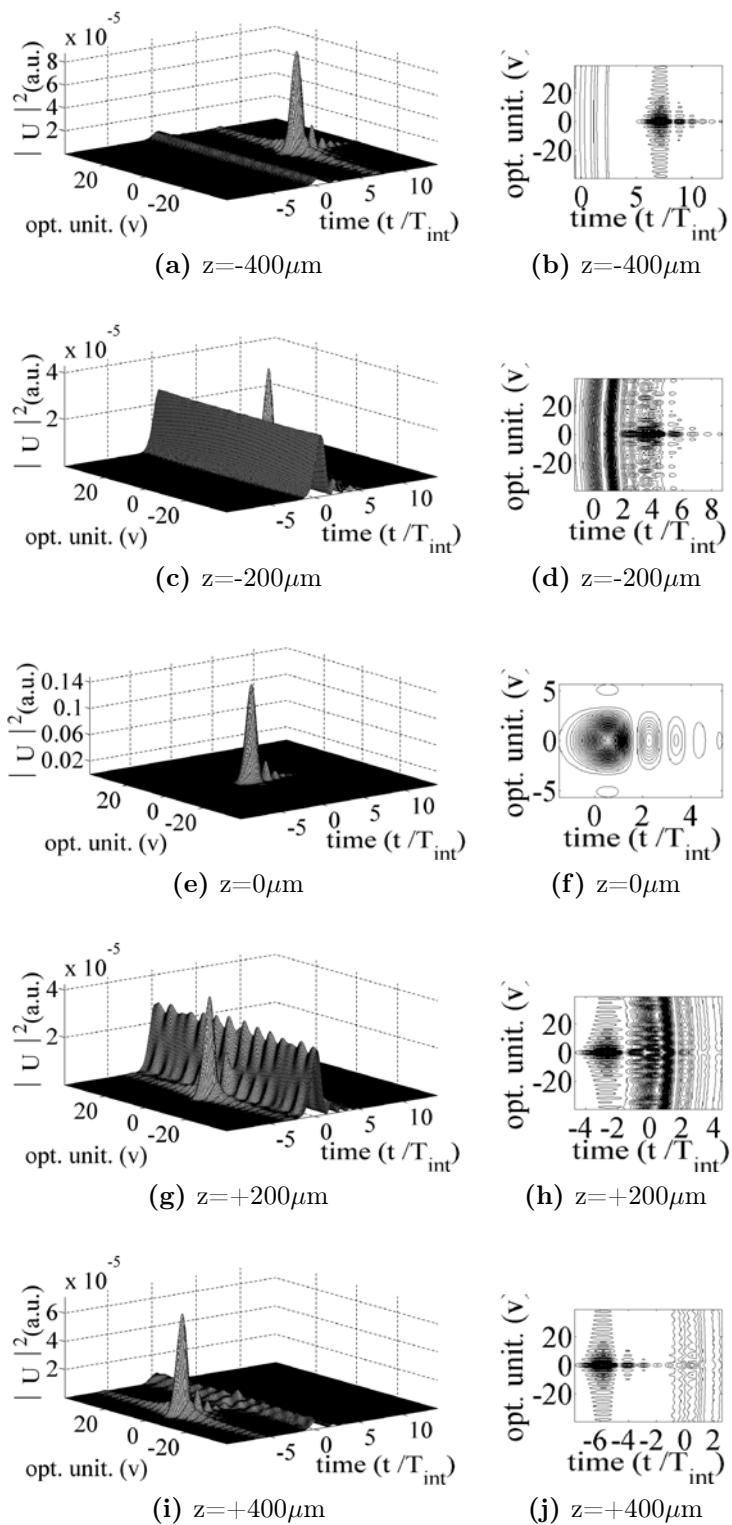


Figura D.12: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=20\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de GVD, i.e., $A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=1$.

$$f_0=20\text{mm}, A=1, \text{PTD}=1, \text{GVD}=1$$

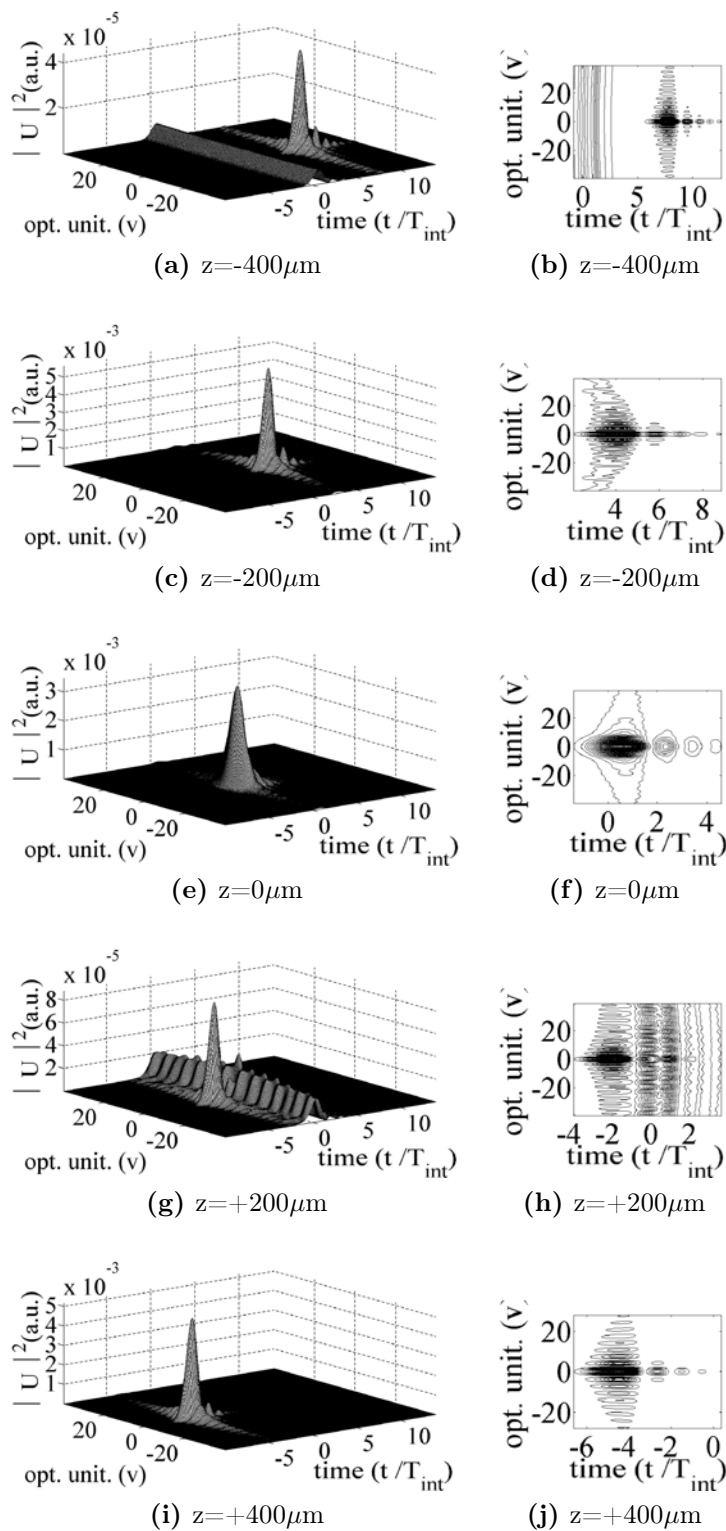


Figura D.13: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=20\text{mm}$, considerado los efectos de PTD, GVD y aberración esférica, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=1$, $\text{GVD}=1$.

D.3. Doblete acromático de distancia focal $f_0=25\text{mm}$

$$f_0=25\text{mm}, A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=0$$

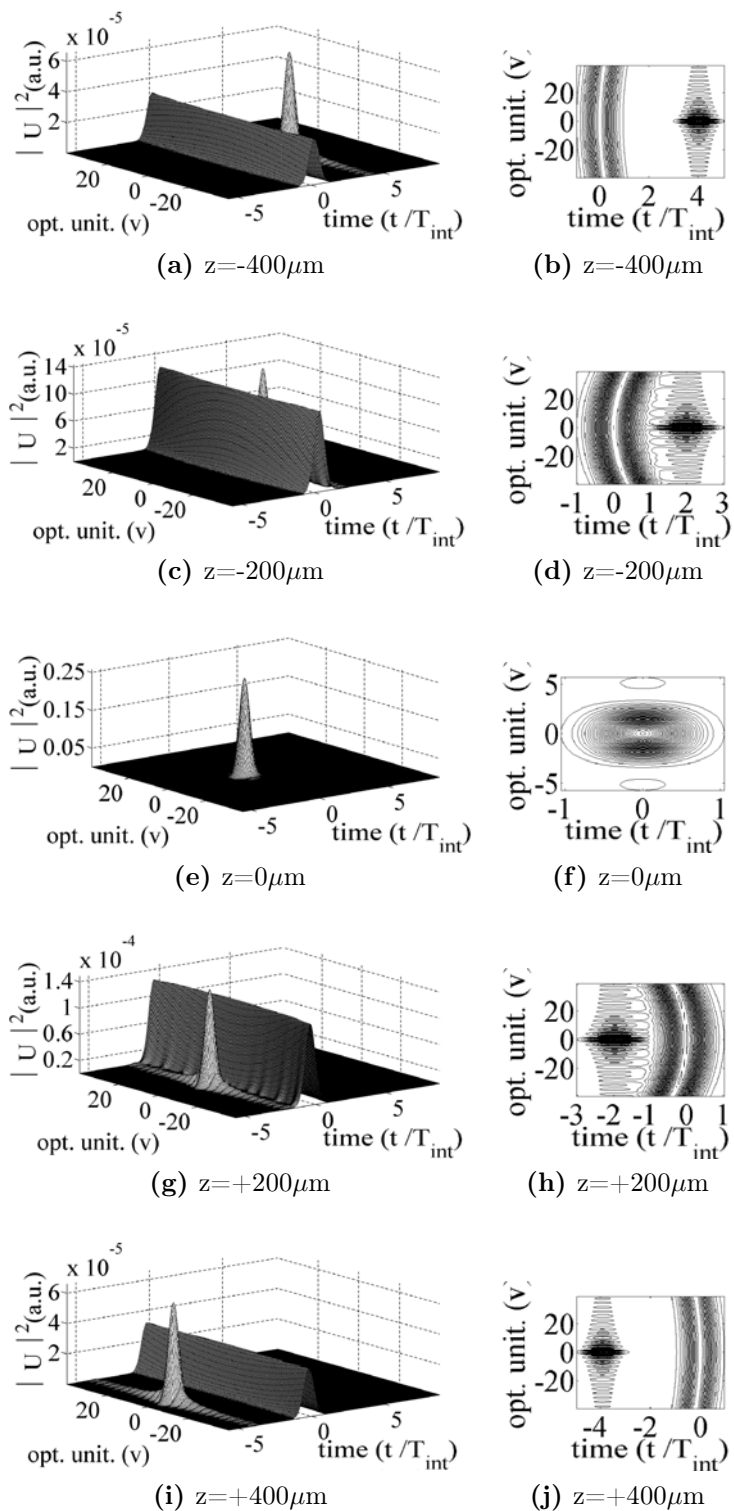


Figura D.14: Se muestra el perfil de intensidad de los pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=25\text{mm}$. en todos los casos se ha considerado que $A=0$, $\text{PTD}=0$, $\text{GVD}=0$, por lo que el efecto es sólo por el desenfocamiento.

$$f_0=25\text{mm}, A=1, \text{PTD}=0, \text{GVD}=0$$

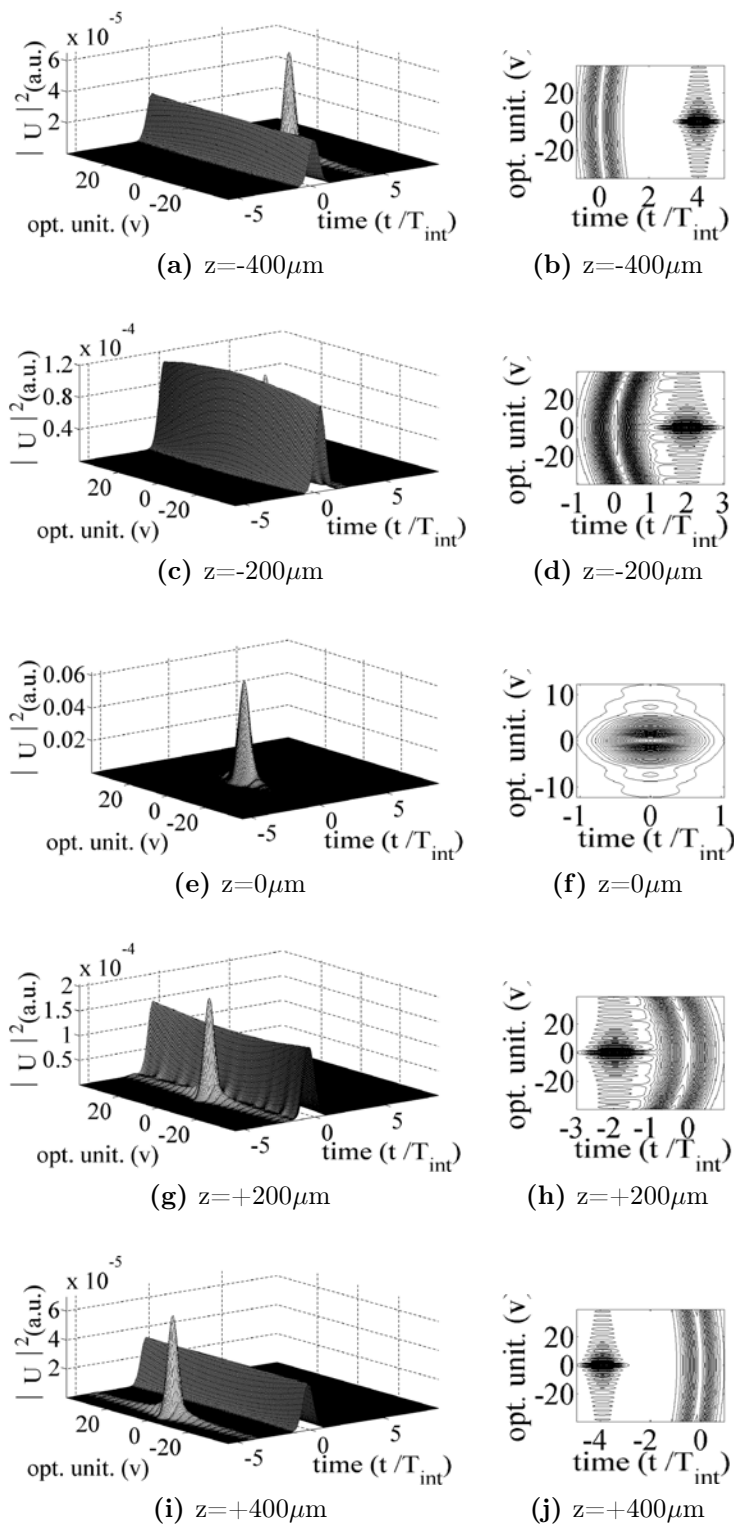


Figura D.15: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=25\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de la aberración cromática, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=0$, $\text{GVD}=0$.

$$f_0=25\text{mm}, A=0, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$$

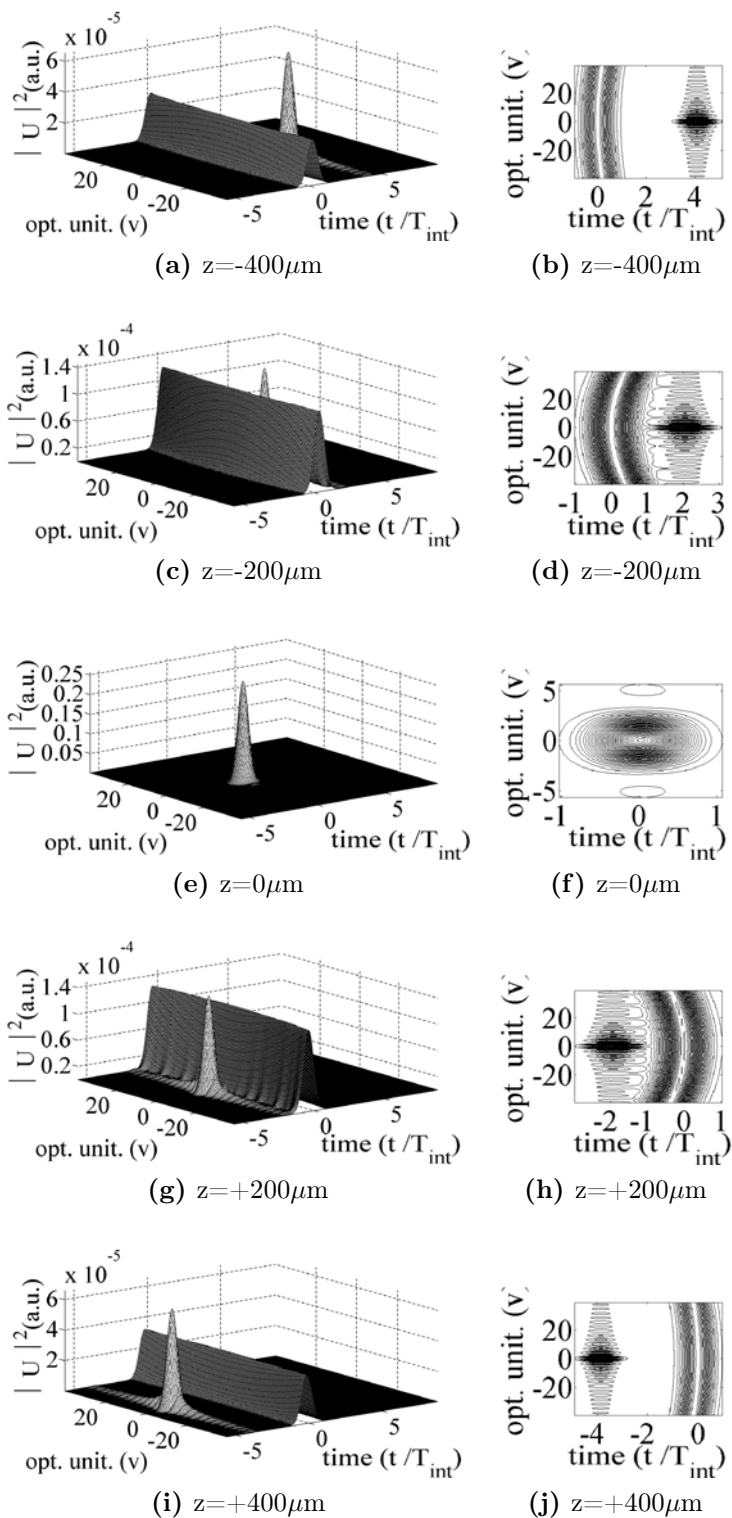


Figura D.16: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=25\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de PTD, i.e., $A=0$, $\text{PTD}=1$, $\text{GVD}=0$.

$$f_0=25\text{mm}, A=1, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$$

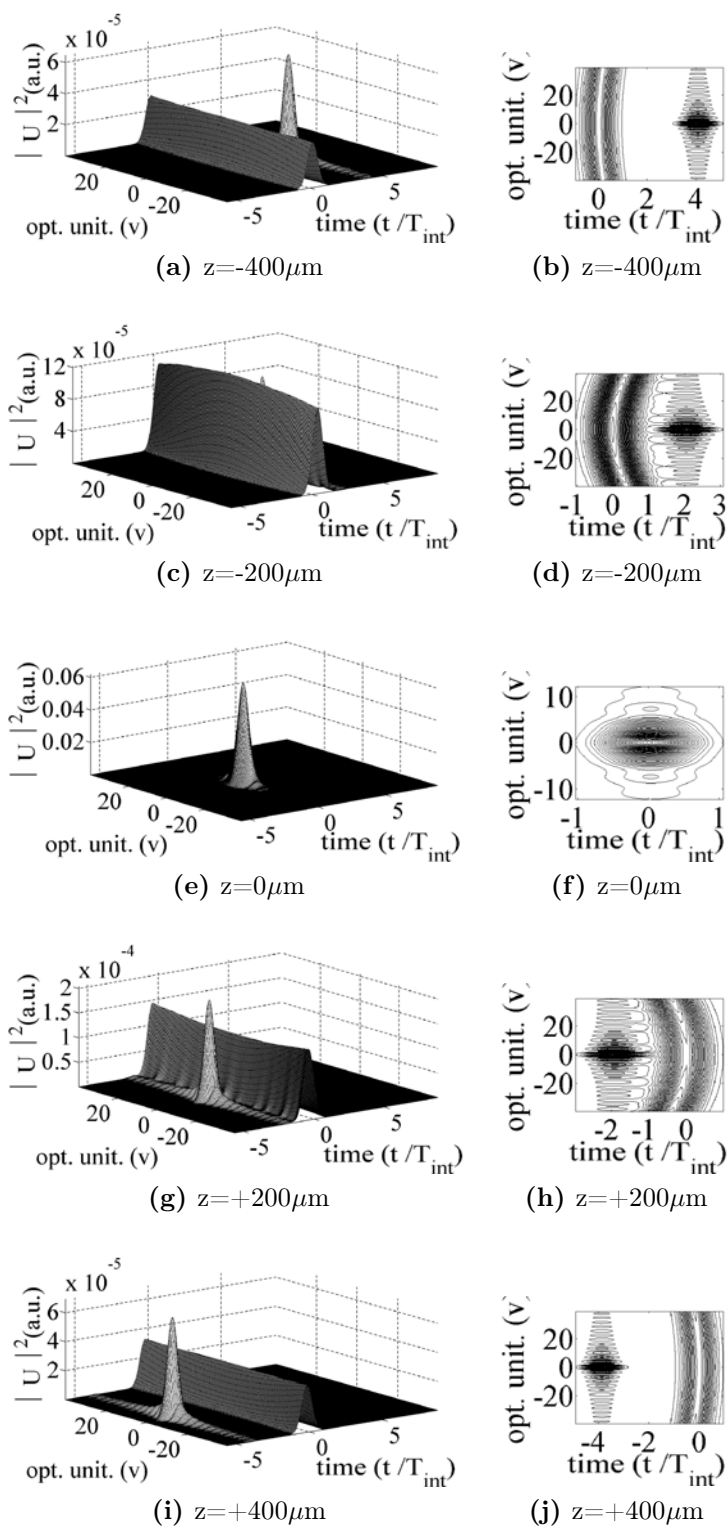


Figura D.17: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=25\text{mm}$, considerado el efecto de PTD y la aberración esférica, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=1$, $\text{GVD}=0$

$$f_0=25\text{mm}, A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=1$$

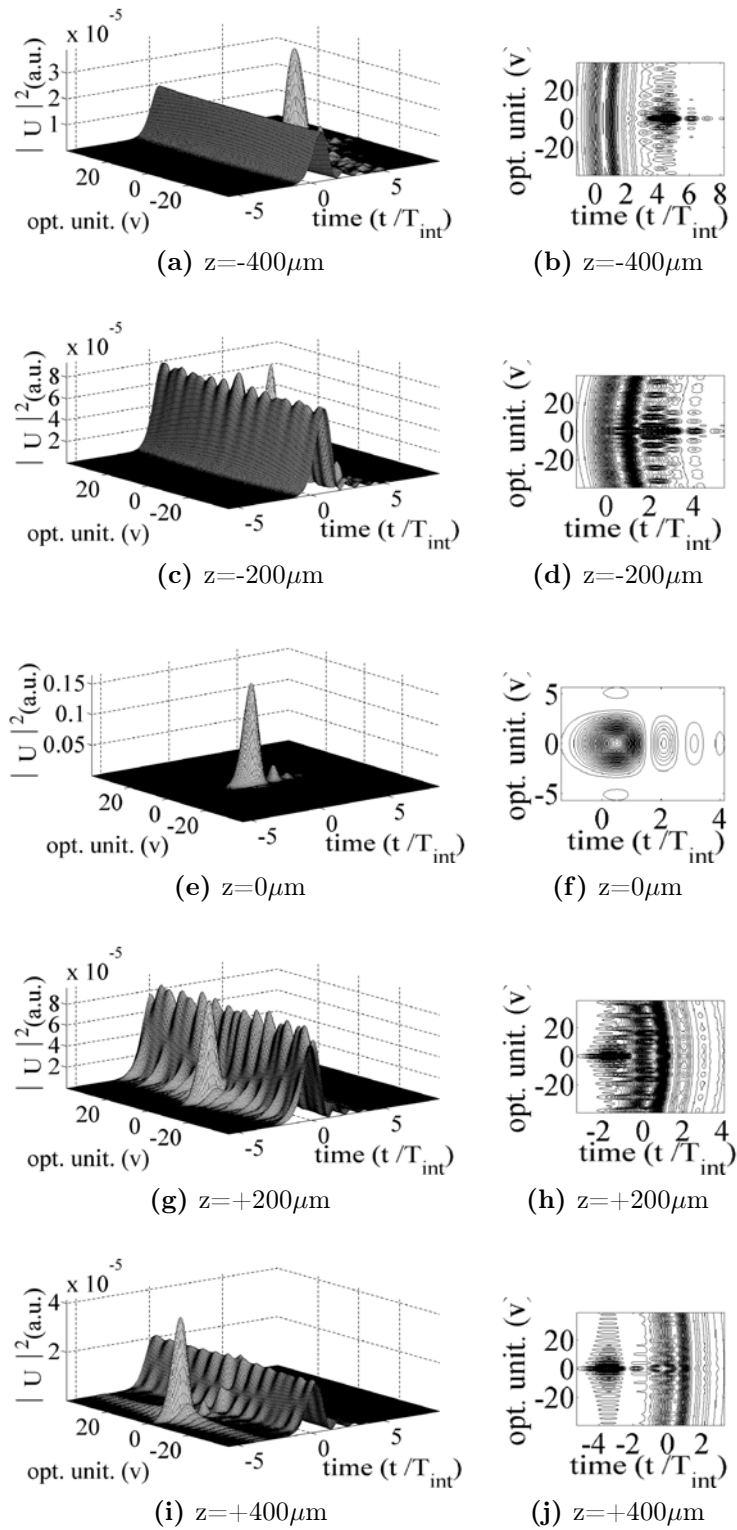


Figura D.18: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=25\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de GVD, i.e., $A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=1$.

$$f_0=25\text{mm}, A=1, \text{PTD}=1, \text{GVD}=1$$

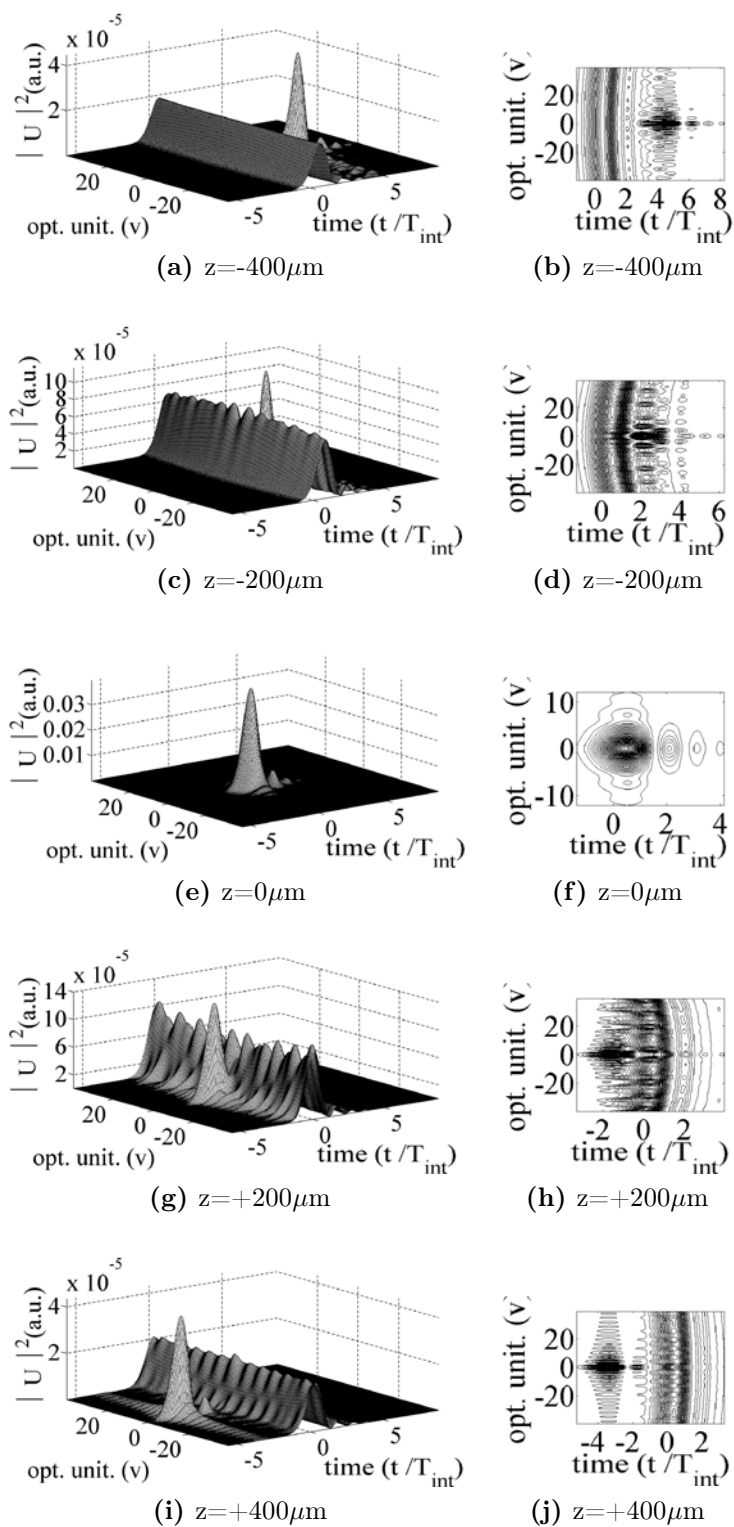


Figura D.19: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=25\text{mm}$, considerado los efectos de PTD, GVD y aberración esférica, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=1$, $\text{GVD}=1$.

D.4. Doblete acromático de distancia focal $f_0=30\text{mm}$

$$f_0=30\text{mm}, A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=0$$

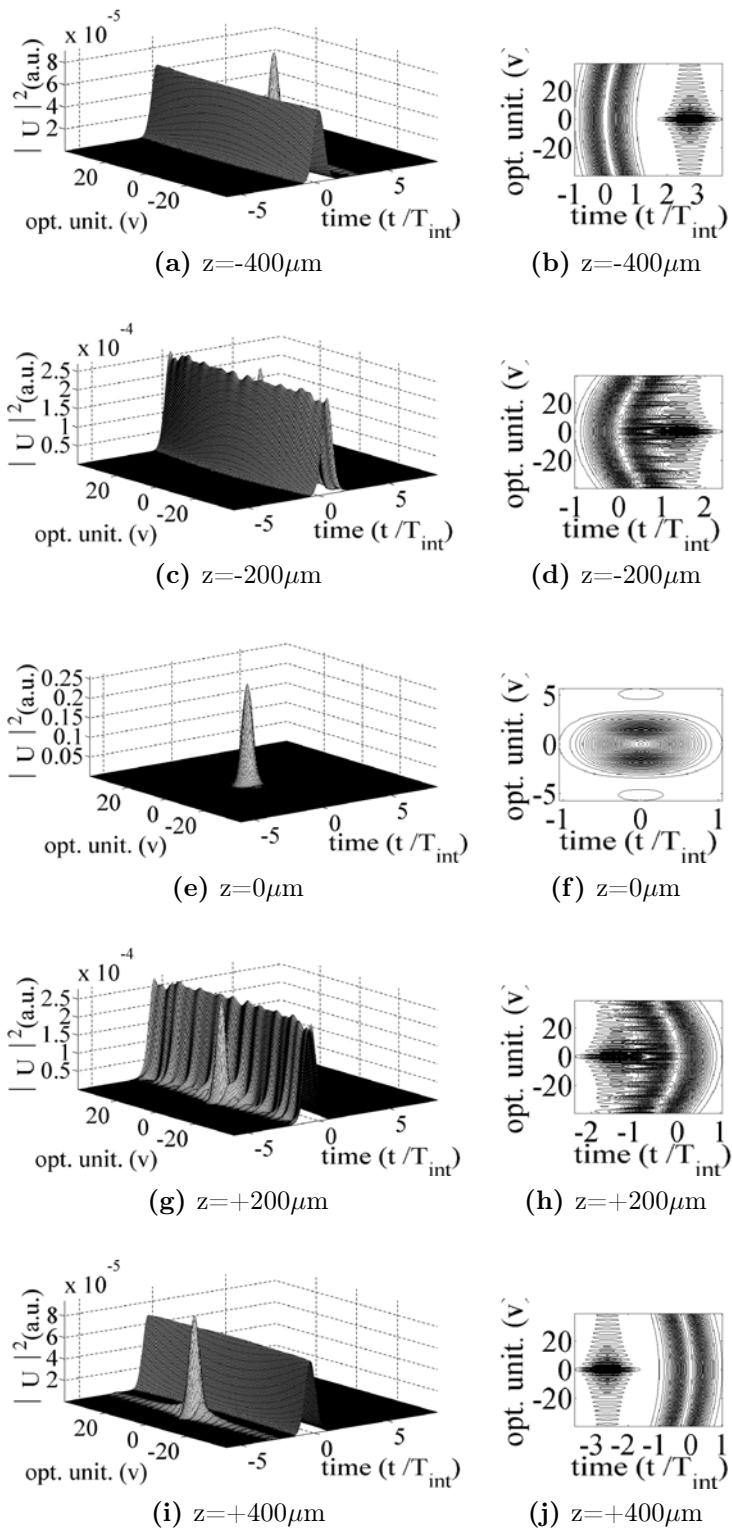


Figura D.20: Se muestra el perfil de intensidad de los pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=30\text{mm}$. en todos los casos se ha considerado que $A=0$, $\text{PTD}=0$, $\text{GVD}=0$, por lo que el efecto es sólo por el desenfocamiento.

$$f_0=30\text{mm}, A=1, \text{PTD}=0, \text{GVD}=0$$

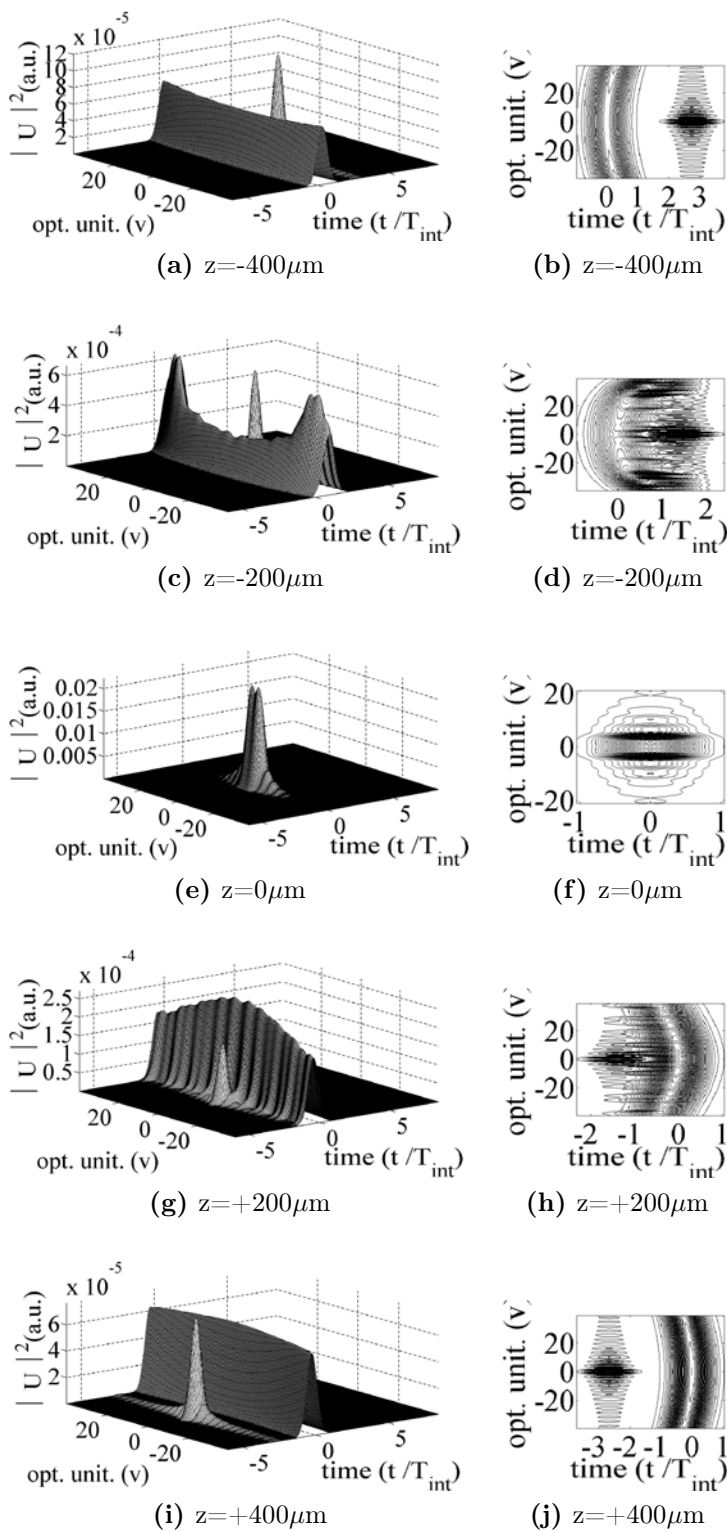


Figura D.21: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=30\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de la aberración cromática, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=0$, $\text{GVD}=0$.

$$f_0=30\text{mm}, A=0, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$$

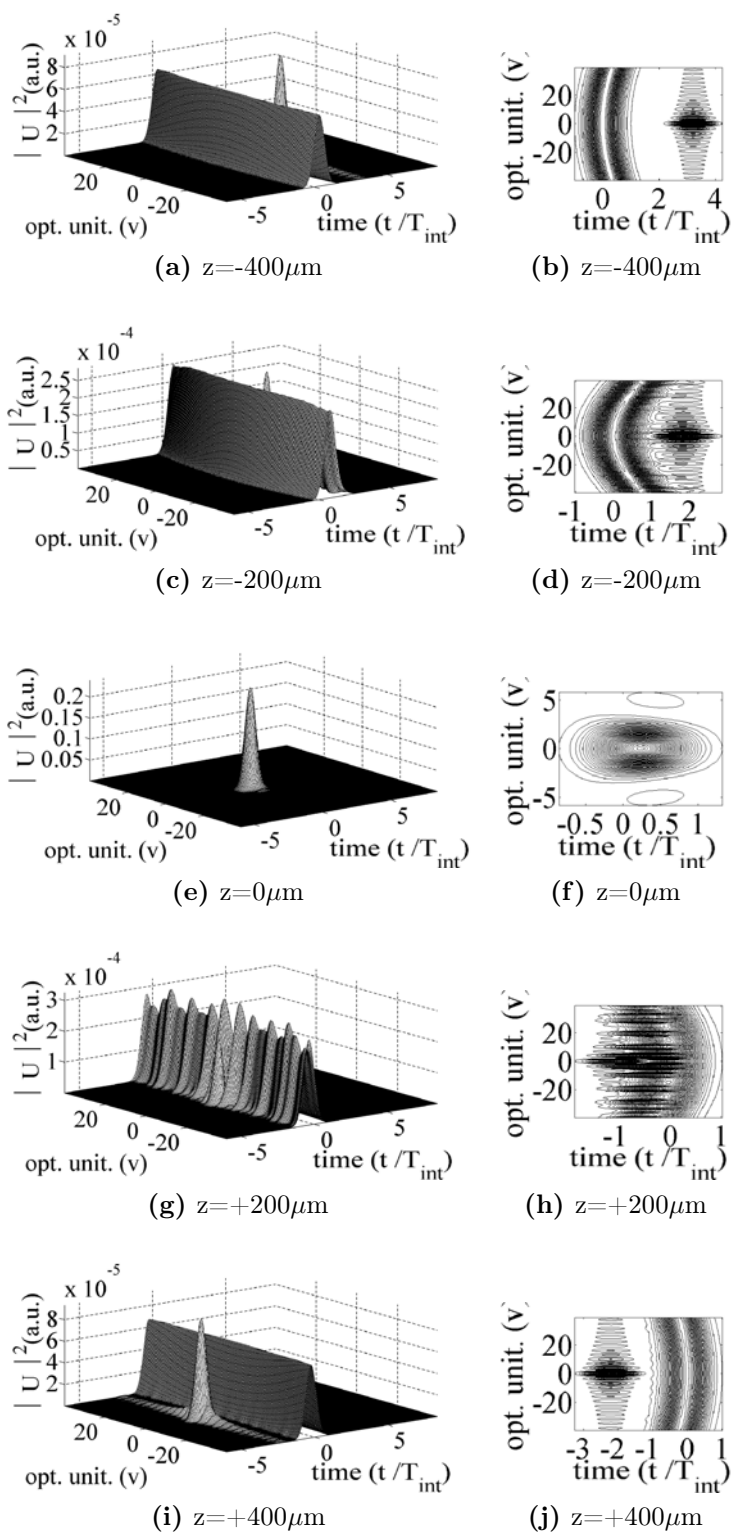


Figura D.22: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=30\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de PTD, i.e., $A=0, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$.

$$f_0=30\text{mm}, A=1, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$$

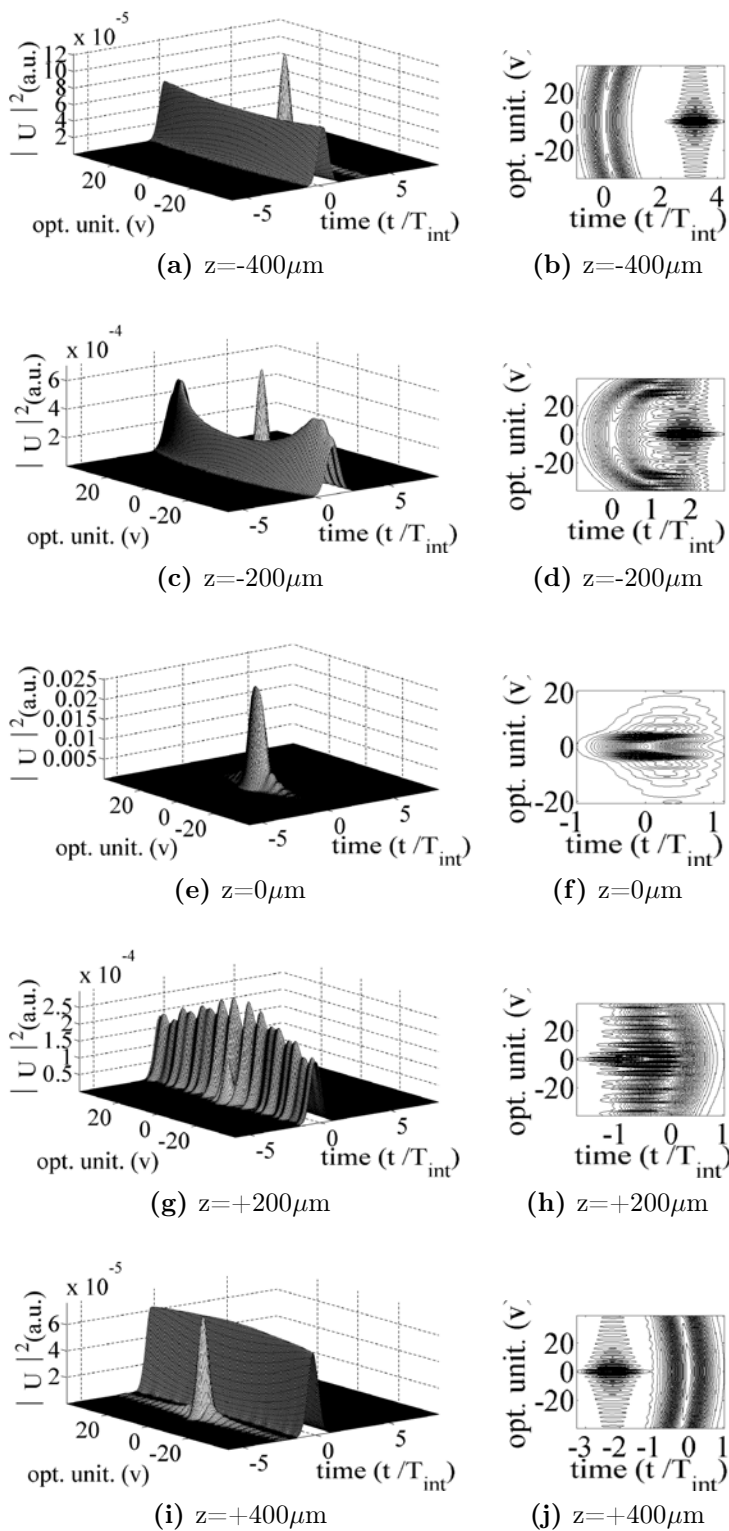


Figura D.23: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=30\text{mm}$, considerado el efecto de PTD y la aberración esférica, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=1$, $\text{GVD}=0$

$$f_0=30\text{mm}, A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=1$$

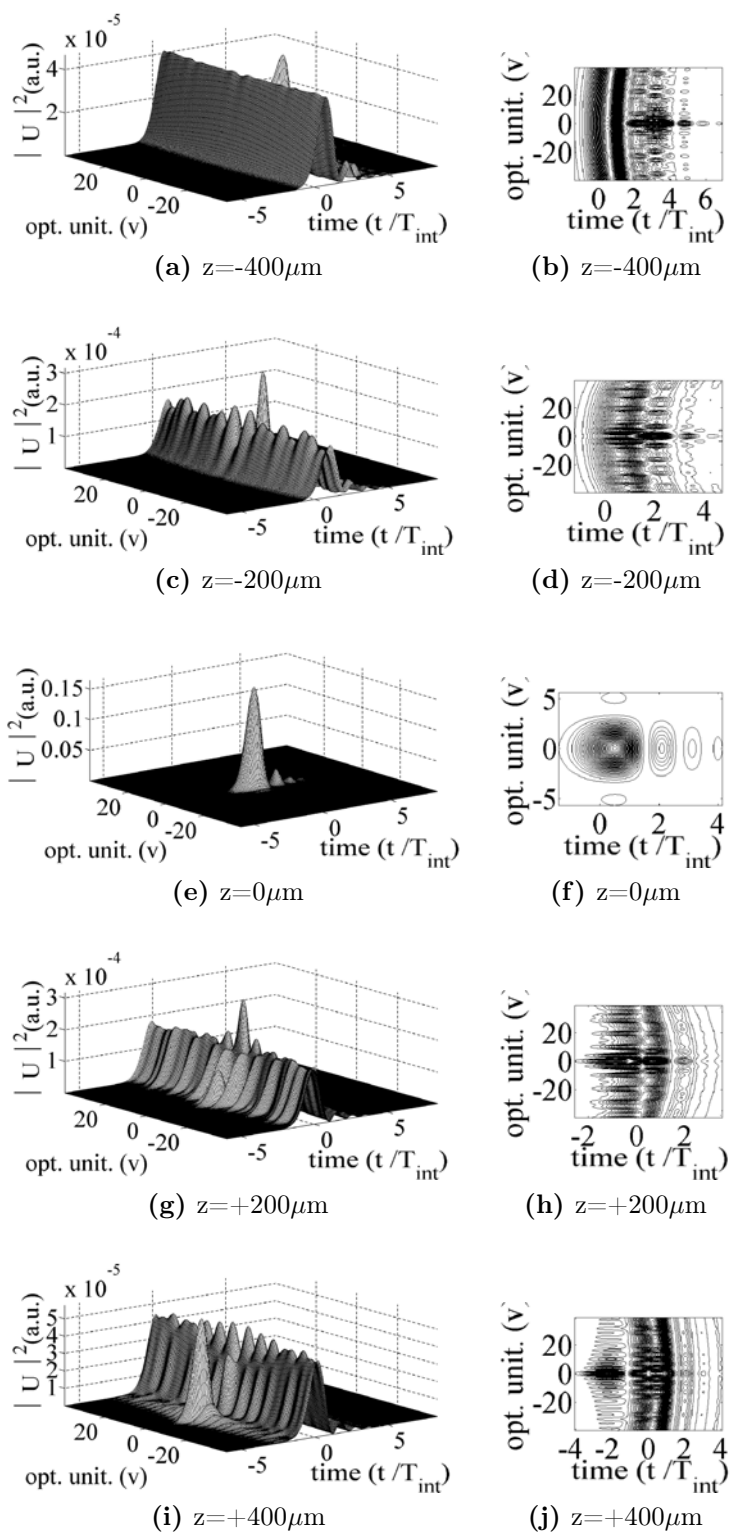


Figura D.24: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=30\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de GVD, i.e., $A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=1$.

$$f_0=30\text{mm}, A=1, \text{PTD}=1, \text{GVD}=1$$

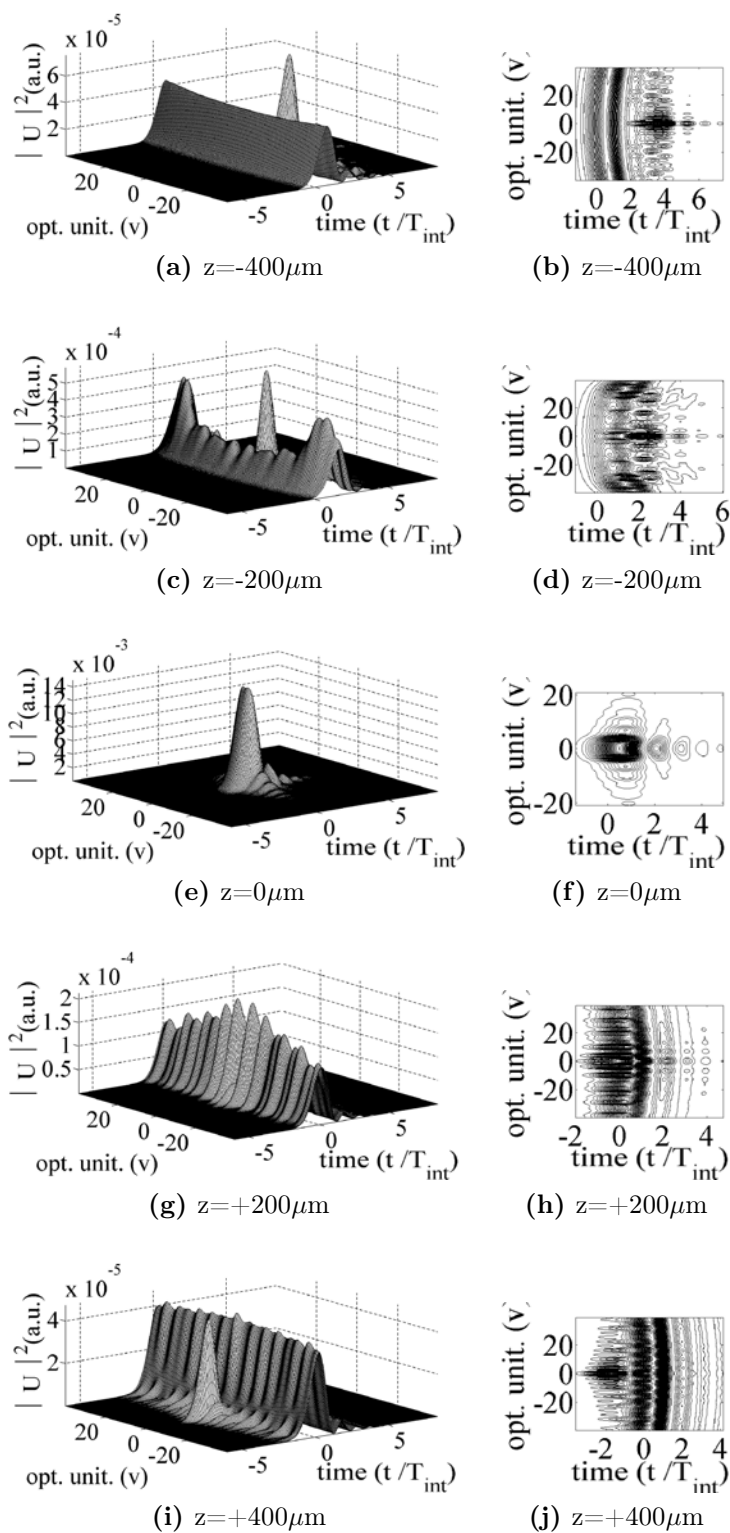
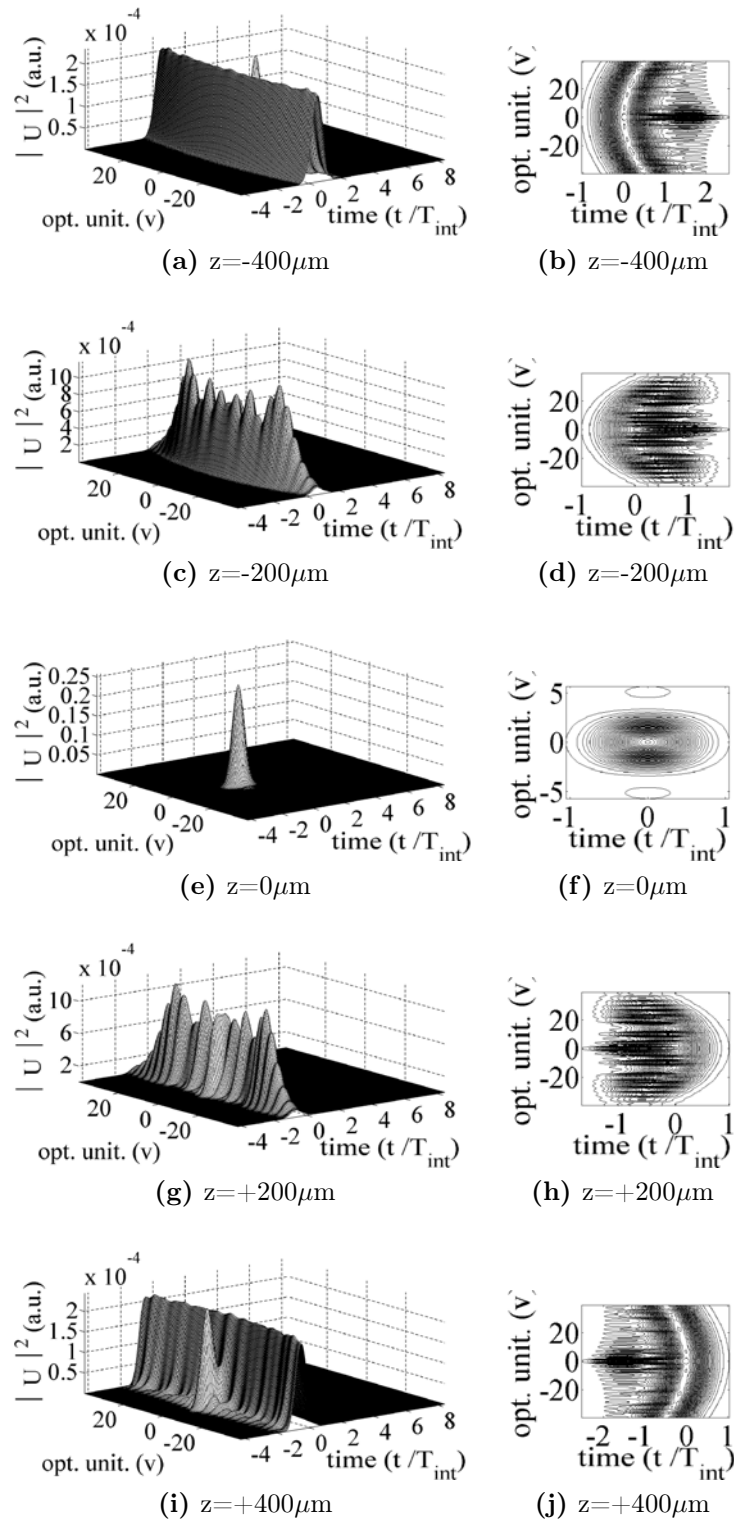


Figura D.25: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=30\text{mm}$, considerado los efectos de PTD, GVD y aberración esférica, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=1$, $\text{GVD}=1$.

D.5. Doblete acromático de distancia focal $f_0=40\text{mm}$

$$f_0=40\text{mm}, A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=0$$



185

Figura D.26: Se muestra el perfil de intensidad de los pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=40\text{mm}$. en todos los casos se ha considerado que $A=0$, $\text{PTD}=0$, $\text{GVD}=0$, por lo que el efecto es sólo por el desenfocamiento.

$f_0=40\text{mm}$, $A=1$, $\text{PTD}=0$, $\text{GVD}=0$

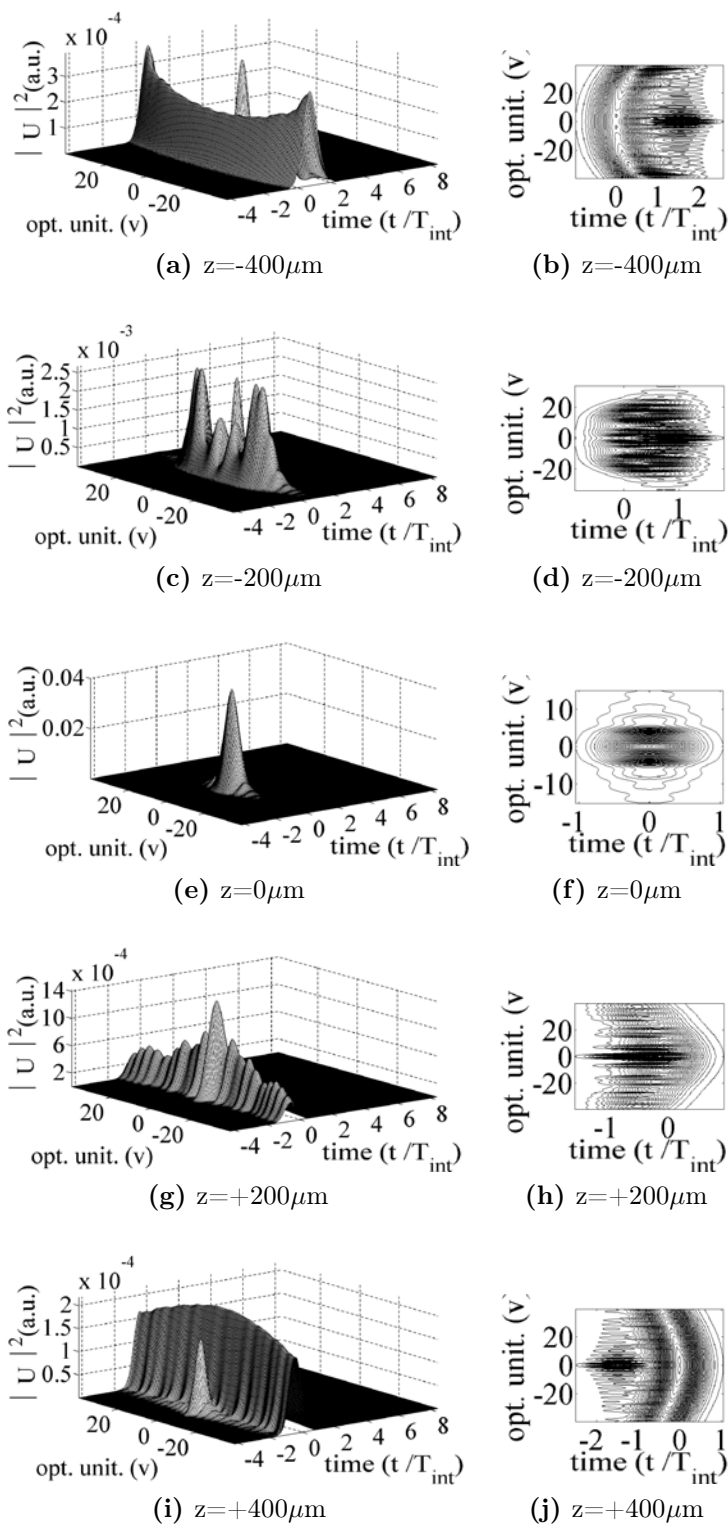


Figura D.27: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=40\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de la aberración cromática, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=0$, $\text{GVD}=0$.

$$f_0=40\text{mm}, A=0, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$$

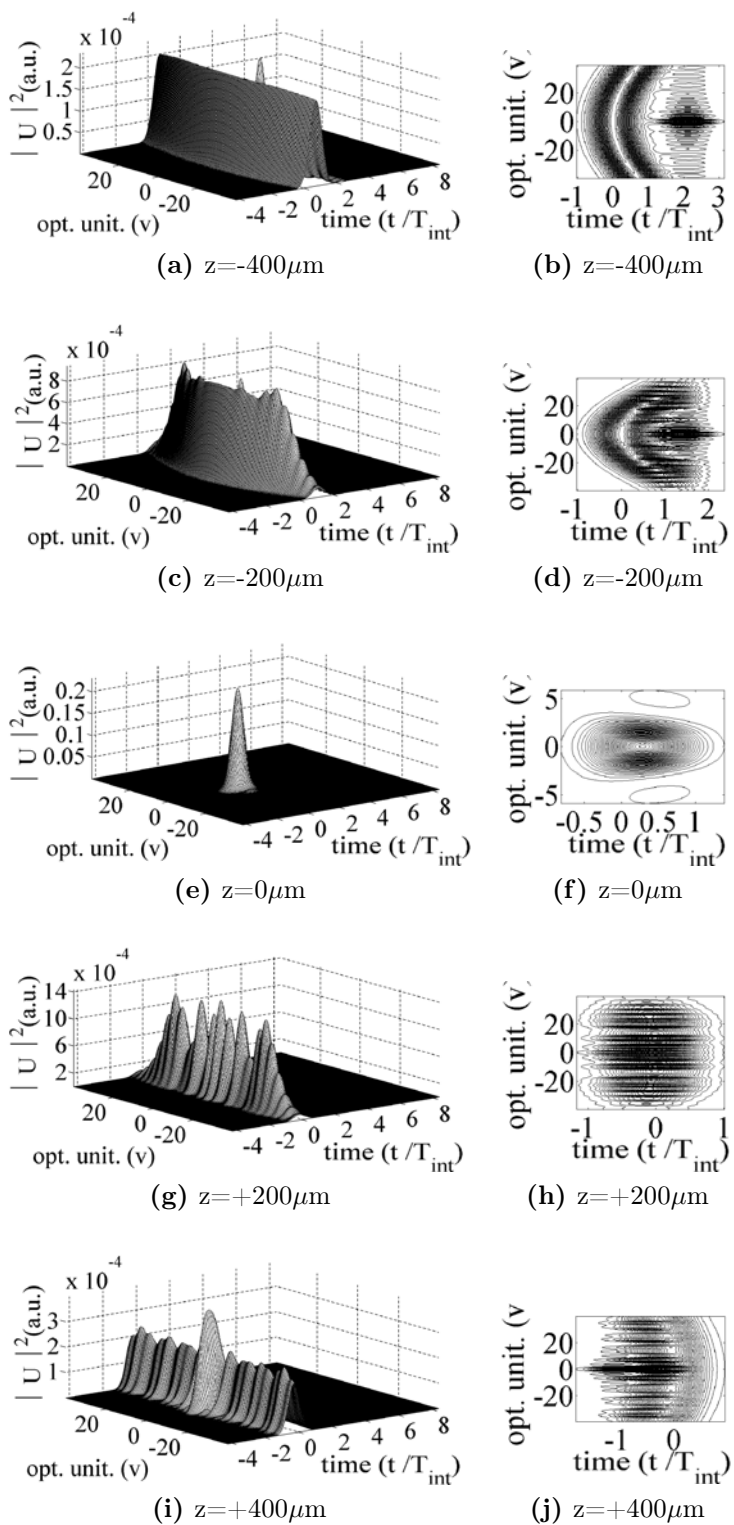


Figura D.28: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=40\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de PTD, i.e., $A=0, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$.

$$f_0=40\text{mm}, A=1, \text{PTD}=1, \text{GVD}=0$$

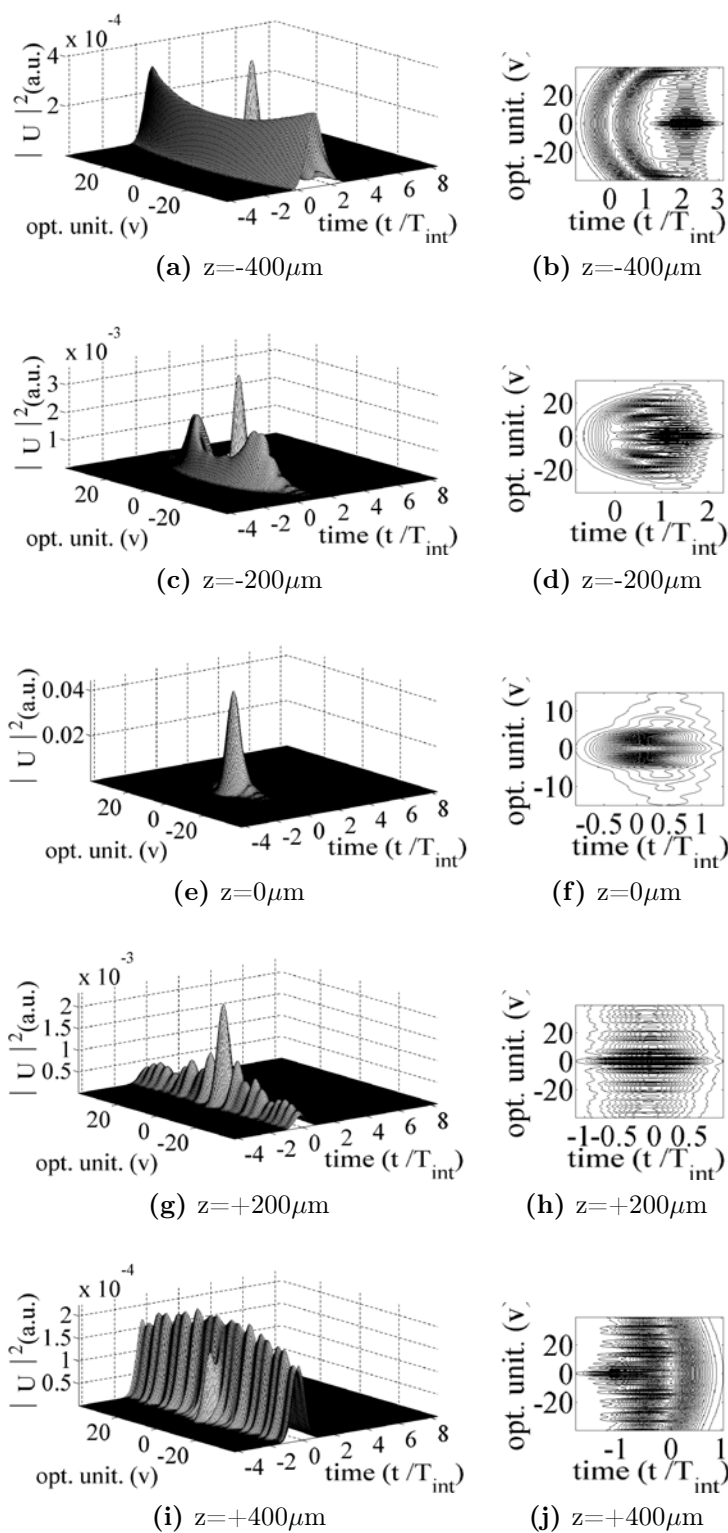


Figura D.29: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=40\text{mm}$, considerado el efecto de PTD y la aberración esférica, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=1$, $\text{GVD}=0$

$$f_0=40\text{mm}, A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=1$$

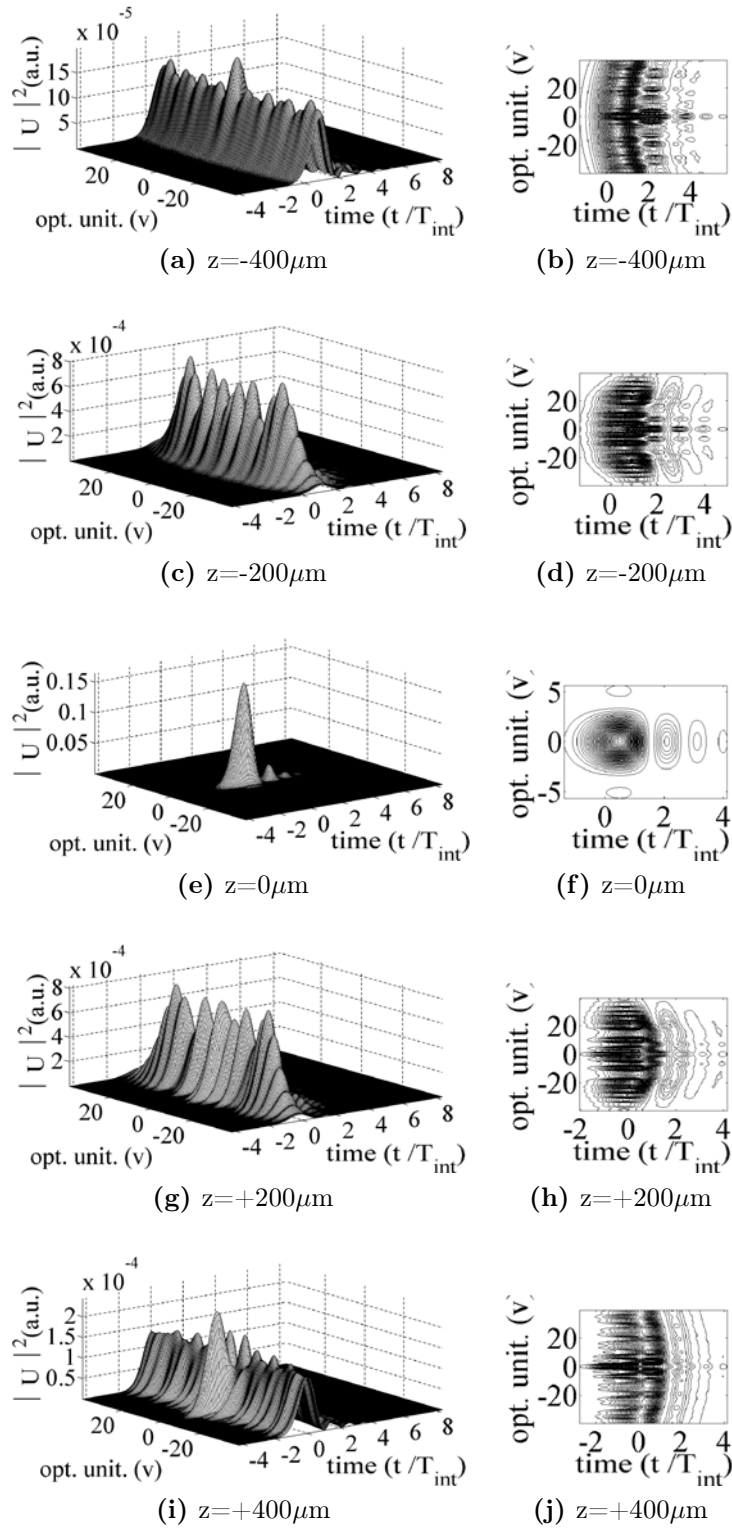


Figura D.30: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=40\text{mm}$, considerado únicamente el efecto de GVD, i.e., $A=0, \text{PTD}=0, \text{GVD}=1$.

$$f_0=40\text{mm}, A=1, \text{PTD}=1, \text{GVD}=1$$

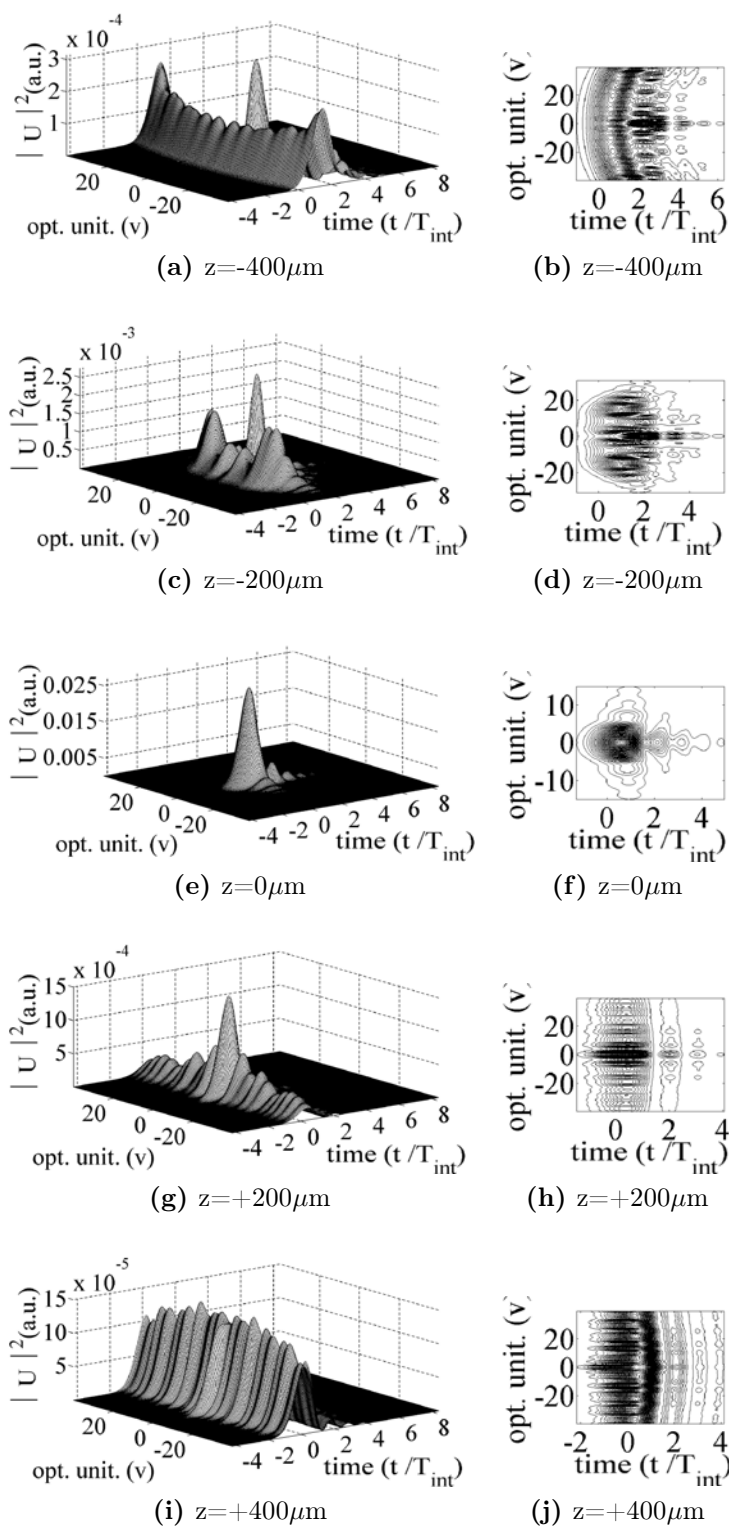


Figura D.31: Se muestra el perfil de intensidad de pulsos de 10fs que han pasado por una doblete acromático de distancia focal $f_0=40\text{mm}$, considerado los efectos de PTD, GVD y aberración esférica, i.e., $A=1$, $\text{PTD}=1$, $\text{GVD}=1$.

Bibliografía

- [1] Maiman T.; *Stimulated Optical Emission in fluorescent solids*, Phys. Rev. **123**, pp. 1141-1158, (1961).
- [2] O. Svelto y D. C. Hanna; *Principles of Lasers*, Springer, (1998).
- [3] Donald C. O'Shea, W. Russell, and William T. Rhodes *Introduction to lasers and their applications*, Addison-Wesley Pub. Co., (1977).
- [4] J. C. Diels, J. J, Fontaine, I.C. McMichael y Fancesco Simoni; *Control and measurement of ultrashort pulse shapes (in amplitude and phase) with femtosecond accuracy*, Appl. Opt. **24**, No. 9, (1985).
- [5] R. Trebino, K. W. DeLong, D. N. Fittinghoff, J. N. Sweetser, M. A. Krumbügel y B. A. Richman; *Measuring ultrashort laser pulses in the time-frequency domain using frequency-resolved optical gating*, Rev. Sci. Instrum. **68**, 3277 (1997).
- [6] D.T. Reid, M. Padgett, C. McGowan, W. E. Sleat y W. Sibbett; *Light-emitting diodes as measurement devices for femtosecond laser pulses*, Opt. Lett., **22**, pp. 233- 235, (1997).
- [7] R.Sanz, C. Dios, H. Lamela; *Diseño y caracterización de un sistema instrumental para la medida de pulsos ultracortos (<ps) utilizando diodos láser*, (por publicarse).
- [8] Dudley Barry; *Complete characterization of ultrashort pulse source at 1550nm*, IEE Journal of Quantum Electronics, **35**, No. 4, (1999).
- [9] C. Rullière; *Femtosecond Laser Pulses, Principles and Experiments*, Springer Science Business Media, Inc. (2005).
- [10] M. Kempe and W.Rudolph; *Analysis of confocal microscopy under ultrashort light-pulses illumination* , J. Opt. Soc. Am. A **10**, No. 2, 1993.
- [11] Z. Bor, Z, Gogolak, and G. Szabo; *Femtosecond-resolution pulse-front distortion measurement by time-of-flight interferometry*, Opt. Lett. **14**, 862-864 (1989).

- [12] Z. L. Horváth, K. Osvay and Z. Bor; *Dispersed femtosecond pulse in the vicinity of focus*, Opt. Comm. **111**, pp. 478-482, (1994).
- [13] Kempe M. and Rudolph W.; *Impact of chromatic and spherical aberration on the focusing of ultrashort light pulses by lenses*, Opt. Letters, Vol 18, No. 2, January, 1993.
- [14] M. Rosete-Aguilar, F. C. Estrada-Silva, J. Garduño-Mejía, N. C. Bruce, *Third Order Dispersion Effects Generated by Achromatic Doublets on sub-20 Femtosecond Optical Pulses*, Proc. (SPIE), pp.7652, (2010).
- [15] M. Kempe, U. Stamm, B. Wilhemi and W. Rudolph; *Spatial and temporal transformation of femtosecond laser pulses by lenses and lens systems*, J. Opt. Soc. Am. B **9**, No. 7, pp. 1158-1165, 1992.
- [16] Zoltán L. Horváth, Zsolt Benkő, Attila P. Kovács and Zsolt Bor *Propagation of femtosecond pulses through lenses, gratings and slits*, Opt. Engineering, **32**, No. 10, pp.2491-2500, (1993).
- [17] Giovana T. Nogueira, Bingwei Xu, Yves Coello, Marcos Dantus y Flavio C. Cruz; *Broadband 2.12 GHz Ti:sapphire laser compressed to 5.9 femtoseconds using MIIPS*, Opt. Expr., **16**, No.14, pp. 10033-10038, (2008).
- [18] F.C. Estrada-Silva, M. Rosete-Aguilar, J. Garduño-Mejía, M.A. González-Galicia, N.C. Bruce and R. Ortega-Martínez. *Third order effects generated by refractive lenses on sub 20 femtosecond optical pulses*, J. of Phys.: Conference Series, 274, 012126, (2011).
- [19] Z.I. Hórvath, A. P. Kovács, and Zs. Bor; *Distortion of ultrashort pulses caused by aberrations*, pp.220 to 222, (2204).
- [20] M. A. González-Galicia, M. Rosete-Aguilar, J. Garduño-Mejía, N. C. Bruce, and R. Ortega-Martínez; *Effects of primary spherical aberration, coma, astigmatism, and field curvature on the focusing of ultrashort pulses: Gaussian illumination and experiment*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 28, No. 10, pp.1990 a 1994, 2011.
- [21] M. A. González-Galicia, M. Rosete-Aguilar, J. Garduño-Mejía, N. C. Bruce, and R. Ortega-Martínez; *Effects of primary spherical aberration, coma, astigmatism and field curvature on the focusing of ultrashort pulses: homogenous illumination*, J. Opt. Soc. Am. A, Vol. 28, No. 10, 1979-1989, 2011.
- [22] L. García-Martínez, M. Rosete-Aguilar y J. Garduño-Mejía; *Gauss-Legendre quadrature method used to evaluate the electric field envelope of ultrashort pulses in the focal region of lenses*, Appl. Opt., aceptado, (2011).
- [23] Vadim Lozovoy and Marcos Dantus; *When shorter is better*, Proc. of SPIE Vol. 7203, 72030Y-1-72030Y-7, (2009).

- [24] Laura T. Schelhas, Janelle C. Shane, Marcos Dantus, *Advantages of ultrashort phase-shaped pulses for selective two-photon activation and biomedical imaging*, Science Direct., **2**, 177-181, (2006).
- [25] Peng Xi, Yair Andegenko, Lindsay R. Weisel, Vadim V. Lozovoy, Marcos Dantus, *Greater signal, increased depth, and less photobleaching in two-photon microscopy with 10fs pulses*, Optics Commun., **281**, 1841-1849, (2007).
- [26] Peng Xi, Yair Andegenko, Lindsay R. Weisel, Vadim V. Lozovoy, Marcos Dantus, *Two-photon laser scanning microscopy with ultrabroad bandwidth 110nm FWHM femtosecond pulses*, Multiphoton Microscopy in the Biomedical Science VIII, Proc. of SPIE Vol. 8660, 68601U-1-68601U-8, (2008).
- [27] Lindsay R. Weisel, Peng Xi, Yair Andegenko, Vadim V. Lozovoy, Marcos Dantus, *Greater signal and contrast in two-photon microscopy with ultrashort pulses*, Multiphoton Microscopy in the Biomedical Science VIII, Proc. of SPIE Vol. 6860, 68601O-1-68601O-5, (2008).
- [28] J. Squier P. S. Tsai, B. Friedman; *Cutting tissue with ultrashort laser light*, Optics and Photonics, **15** (7), (2004).
- [29] Stern D, Schoenlein R, Puliafito C, Dobi E, Birngruber R, Fujimoto J.; *Corneal ablation by nanosecond, picosecond, and femtosecond lasers at 532 nm and 625 nm*, Arch. Ophthalmol. **107**, pp. 587-592, (1989).
- [30] Alexander Heisterkamp, Thanongsak Mamom, Omid Kermani, Wolfgang Drommer, Herbert Welling, Wolfgang Ertmer and Holger Lubatschowski; *Intrastromal refractive surgery with ultrashort laser pulses: in vivo study on the rabbit eye*, Graefe's Arch. Clin. Exp. Ophthalmology, **241**, pp. 511 to 517, (2003).
- [31] Philbert S. Tsai, Beth Friedman, Agustin I. Ifarraguerri, Beverly D. Thompson, Varda Lev-Ram, Chris B. Schaffer, Qing Xiong, Roger Y. Tsien, Jeffrey A. Squier, and David Kleinfeld; *All-Optical Histology Using Neurotechnique Ultrashort Laser Pulses*, Neuron, **39**, pp. 27 to 41, (2003).
- [32] L. J. Lee H. Lee H.W. Choi, D.F. Farson; *Ultrashort pulsed laser machining for biomolecule trapping*, Journal of the Optical Society of Korea, **13** No. 3, pp.335-340, (2009).
- [33] A. Dulta D. Goswami A. K. De, D. Roy; *Stable optical trapping of latex nanomaterials with ultrashort pulsed illumination*, App. Opt., **48**, No. 31, (2009).
- [34] M. Y. Shen, C. H. Crouch, J. E. Carey, and E. Mazur; *Femtosecond laser-induced formation of submicrometer spikes on silicon in water*, Appl. Phys. Lett., **85**, no. 23, pp.5694 to 5696, (2004).

- [35] S. R. Foltyn; *Pulsed Laser Deposition of Thin Films*, edited by D. B. Chrisey and G. K. Hubler (Wiley-Interscience, New York), pp. 89 to 113, (1994).
- [36] Z.Q. Hao Z. Zhang M. Chen X. Lu Z.H.Wang Z.Y. Wei Z.Y. Zheng, J. Zhang; *Paper airplane propelled by laser plasma channels generated by femtosecond laser pulses in air*, Opt. Express, **13** No.26, pp.10616-10621, (2005).
- [37] Noack J, Vogel A; *Laserinduced plasma formation in water at nanosecond to femtosecond time scales: calculation of thresholds, absorption coefficients, and energy density*, IEEE J. Quant. Elec., **35** No. 8, pp.1156 to 1167, (1999)
- [38] B.G. Hernández Pérez; *Espectroscopía con pulsos de femtosegundos*, Tesis de Licenciatura, Universidad Nacional Autonoma de México, 2010.
- [39] Marcos Dantus, Mark J. Rosker, and Ahmed H. Zewail; *Realtime femtosecond probing of "transition states" in chemical reactions*, J. chem Phys., **87**, No. 15, pp.2395 to 2397, (1987).
- [40] Volker Engel; *Excitation of molecules with ultrashort laser pulses: exact time-dependent quantum calculations*, Computer Physics Communications, pp.228 to 242, (1991).
- [41] B.M. Garraway, S. Stenholm and K.A. Suominen; *Adventures in Wave packet land*, Phys. World, **6**, No. 4, pp. 46, (1993).
- [42] X. Liu, D. Du, and G. Mourou; *Laser ablation and micromachining with ultrashort laser pulses*, IEEE Quant. Elec. **33**, (1997).
- [43] <http://www.cmxr.com/Micromachining>
- [44] Tyson N. Kim, Kyle Campbell, Alex Groisman, David Kleinfeld, and Chris B. Schaffe; *Femtosecond laser-drilled capillary integrated into a microfluidic device*, Appl. Phys. Lett. **86**, 201106, (2005).
- [45] James M. Bustillo, roger T. Howe and Richard S. Muller; *Surface Micromachining for Microelectromechanil Systems*, Proceedingd of the IEEE **86**, No. 8, (1998).
- [46] Garduño Mejía Jesús; *Láser de Ti:Zaf con cavidad de anillo y pulsos de femtosegundos de operación bidireccional*, Tesis de Doctorado, CICESE, 2001.
- [47] González Galicia Miguel Angel; *Fabricación de un láser de Ti:zaf, en la escala de femtosegundos*, Tesis en preparación CCADET-UNAM.
- [48] Zs. Bor and Z.L. Horváth; *Distortion of a 6 fs Pulse in the Focus a BK7 Lens*, Springer Series in Chemical Physics **55**, 150-151, 1993.

- [49] M. Rosete-Aguilar, Flor C. Estrada-Silva, N. C. Bruce, C. J. Román-Moreno y Roberto Ortega-Martínez; *Calculation of temporal spreading of ultrashort pulses propagating through optical glasses*, Revista Mexicana de Física, **54** 2, 141-148, (2008).
- [50] Flor C. Estrada-Silva, Jesús Garduño-Mejía, Martha Rosete-Aguilar, Carlos J. Román-Moreno y Roberto Ortega-Martínez; *Aberration effects on femtosecond pulses generated by non ideal achromatic doublets*, Appl. Opt., **48**, No. 24, 4723-4734, (2009).
- [51] M. Rosete-Aguilar, J. Garduño-Mejía, Flor C. Estrada-Silva, Carlos J. Román-Moreno, Neil Bruce y Roberto Ortega-Martínez; *Analytical method for calculating the electric field envelope of ultrashort pulses by approximating the wavenumber up to third order*, Appl. Opt., **49**, 13, 2463-2468, (2010).
- [52] Zs. Bor and Z.L. Horváth; *Behaviour of femtosecond pulses on the optical axis of a lens. Analytical description*, Optics Communications **108**, 333-342, 1994.
- [53] R.L Fork, O.E. Martinez y J. P. Gordon, *Negative dispersion using pairs of prisms*, Opt. Lett. Vol. **9**, No. 5, pp.150-152, (1984).
- [54] Ramírez-Corral, C.Y., Rosete-Aguilar, M. , Garduño-Mejia, J.; *Third-order dispersion in a pair of prisms*, J. Mod. Opt, Vol. **56**, No.15, pp.1659-1669, (2009).
- [55] J. P. Gordon y R.L Fork; *Optical resonator with negative dispersion*, Opt. Lett., **9**, No. 5, pp.153 to 155, (1984).
- [56] G. O. Mattei y M. A. Gil; *Spherical aberration in spatial and temporal transforming lenses of femtosecond laser pulses*, Appl. Opt., **38**, pp. 1058-1064, (1999).
- [57] M.J. Kidger; *Fundamental Optical Design*, SPIE- The International Society for Optical Engineering, Bellingham, Washington, USA. (2002).
- [58] S. Anaya Vera; *Cálculo de la aberración esférica en sistemas rotacionales simétricos*, Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias, UNAM, (2009).
- [59] Flor C. Estrada-Silva, Martha Rosete-Aguilar, Jesús Garduño-Mejía; *Efectos de tercer orden generados en lentes refractivas para pulsos ultracortos del orden de 20fs*, XXIII Reunión Anual de Óptica, XXIII-OPTICA 2010-1, (2010).
- [60] M. Rosete-Aguilar, F.C. Estrada-Silva, N.C. Bruce, C.J. Román-Moreno, R. Ortega-Martínez; *Achromatic Doublets Using Group Indices of Refraction*, Laser Physics, **18**, pp.223-231,(2008).
- [61] Martínez O.E.; *Grating and prism compressors in the case of finite beam size*, JOSA B **3** No.(7), pp. 929-934, 1986.
- [62] Martínez O.E., Gordon, J. P. and Fork R. L.; *Negative group-velocity dispersion using refraction*, JOSA A **1** No.(10), pp. 1003-1006, 1984.

- [63] C.J.R. Sheppard and Xiaosong Gan; *Free-space propagation of femto-second light pulses*, Opt. Comm., 133, 1-6, 1997.
- [64] Miu Gu and C.J.R. Sheppard; *Analysis of confocal microscopy under ultrashort light-pulses illumination: comment*, J. Opt. Soc. Am. A, **11**, No. 10, 1994.
- [65] Hetch Eugene, Zajac Alfred; *Óptica*, Primera Edición, Fondo Educativo Interamericano, S.A. (1977).
- [66] Anthony E. Siegman, *Lasers*, University Science Books, (1986).
- [67] W. Kaiser; *Topics in Applied Physics Volume 60: Ultrashort Laser Pulses Generation and Applications*, Springer Verlag, (1993).
- [68] J.L. Rayces and M. Rosete-Aguilar, *Differential equation of the normal glass dispersion and the evaluation of secondary spectrum*, Appl Opt., **38**, No. 11, pp. 2028- 2039, (1999).
- [69] J.L. Rayces and M. Rosete-Aguilar, *Selection of glasses for achromatic doublets with reduced secondary spectrum. I: Tolerance conditions for secondary spectrum, spherochromatism and fifth-order spherical aberration*, Appl Opt., **40** No.31, pp. 5663-5676, (2001).
- [70] M. Rosete-Aguilar and J. L. Rayces, *Selection of glasses for achromatic doublets with reduced secondary spectrum. II. Application of the method for selecting pairs of glasses for aplanatic achromatic doublets*, Appl Opt., **40** No. 31, pp. 5677-5692, (2001).
- [71] Juan L. Rayces, Martha Rosete-Aguilar, *Selection of glasses for achromatic doublets with reduced secondary spectrum*, Current Developments in Lens Design and Optical Systems Engineering, R.E. Fischer, R.B. Johnson, W.J. Smith, W.H. Swantner, editors. 2-4 Agosto, San Diego, USA, Proceedings of SPIE 4093, 36-46, (2000).
- [72] Vaughan, A.H., *Lens design using group indices of refraction*, J. Mod. Opt., **43**, No. 8, pp. 1683-1700, (1996).
- [73] J. Jasapara y W. Rudolph, *Characterization of sub-10-fs pulse focusing with highnumerical- aperture microscope objectives*, Opt. Lett.,**24**, No. 11. pp. 777-779, (1999).
- [74] X. Gu, S. Akturk, A. Shreenath, Q. Cao, y D R. Trebino, *The Measurement of Ultrashort Light - Simple Devices, Complex Pulses*, Femtosecond Laser Spectroscopy, ed. P. Hannaford, Springer Science Business Media, Inc., (2005).
- [75] Born M. and Wolf E.; *Principles of Optics*, Sexta Edición, Pergamon Press, (1980).
- [76] Cohen L. G. and Lin C.; *Pulse delay measurements in the zero material dispersion wavelength region for optical fibers*, Appl. Optics, **16**, pp. 3136-3139, (1977).

- [77] Ditchburn R. W.; *Light*, London, New York, San Francisco: Academic Press, (1976).
- [78] Hardy and Perrin; *The principles of optics*, Mc Graw-Hill Inc., New York, (1932).
- [79] Fowles, Grant R.; *Introduction to Modern Optics*, Segunda Edición, Dover Publications (1975).
- [80] Max Herzberger; *Modern Geometrical Optics*, Interscience Publishers Inc., New York, (1958).
- [81] Jenkins, F.A. and White, H.E., *Fundamentals of Optics*, "Chapter 23. Dispersion", pag. 462, McGraw-Hill Publishing Company, 1951.
- [82] Diels Jean Claude and Rudolph Wolfgang; *Ultrashort Laser Pulse Phenomena*, Second Edition, Elsevier, Cap.1, (2006).
- [83] Amnon Yariv and Pochi Yeh; *Optical Waves in Crystals*, "Chapter 2. Propagation of laser beam", pág. 45, A Wiley-Interscience publication, (1984).
- [84] Amnon Yariv, A. and Pochi Yeh; *Photonics: Optical Electronics in Modern Communications*, "Chapter 6. Theory of Laser Oscillations and Some Specific Laser Systems", pág. 255, Oxford University Press, 6ta. Edition, 1985.
- [85] Silva Estrada Flor Concepción; *Propagación de pulsos ultracortos en lentes refractivas*, Tesis de maestría, página 28, (2008).
- [86] <http://www.rp-photonics.com/encyclopedia.html>
- [87] L. Brillouin; *Wave Propagation and Group Velocity*, Academic Press, New York, p.21, (1960).
- [88] J. Garduño-Mejía, A. Greenaway, and D. T. Reid; *Designer femtosecond pulses using adaptative optics*, Op. Express, **11**, p. 2030-2040, (2003).
- [89] Mathews John H. and Fink Kurtis D.; *Métodos Numéricos con MATLAB*, Tercera Edición, Prentice Hall (1999). p-427
- [90] Abramowitz Milton and Stegun Irene A.; *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*, Dover (1970).
- [91] W. T. Welford; *Aberrations of Optical Systems*, Tercera Edición, Adam Hilder Bristol, p-139, (1991).
- [92] Yariv A. and Yeh P.; *Photonics*, Oxford University Press, 6th edition, (2007).
- [93] Silfvast, W. T.; *Laser Fundamentals*, Cambridge University Press, USA, p.9, (2004).

- [94] Goodman Joseph W.; *Introduction to Fourier Optics*, McGraw-Hill, Second Edition (1996).
- [95] Zs. Bor y Z.L. Horváth; *Distortion of femtosecond pulses in lenses. Wave optical description*, Physics Communications, Vol 94, 249-258, 1992.
- [96] Kempe M. and Rudolph W.; *Femtosecond pulses in the focal region of lenses*, Phys. Rev. A, **48**, pp. 4721-4729, 1993.
- [97] Schott Optical Glass Catalog, www.us.schott.com/optics_devices (mayo 2007).
- [98] *Optical Glass Catalog Abbe*, www.us.schott.com-advanced-optics-english-download-schott-abbe-pgf-e-sept-2011.pdf (mayo 2011).
- [99] *Edmund Optics, Optics and Optical Instrument Catalog*, p. 47, 2010.
- [100] Martha Rosete-Aguilar; *Correction of secondary spectrum using standard glasses*, Proc. of SPIE Vol. 2774, Design and Engineering of Optical Systems, 378-386, (1996).
- [101] Arfen and Weber; *Mathematical Methods for physicists*, International Edition, Sexta edición, p.951, 2005.
- [102] Zs. Bor; *Distortion of femtosecond laser pulses in lenses*, Optics Letters **14** No. 2, 119-121, 1989.
- [103] Richard Barakat; *Computation of the Transfer Function of an Optical System from the Design Data for Rotationally Symmetric Aberrations. Part I. Theory*, JOSA, Vol. 52, No. 9, pp. 985-991, 1962.
- [104] Zs. Bor and Z.L. Horváth; *How to Select a Lens for Focusing of Femtosecond Pulses*, Brazilian Journal of Physics **25**, no. 2, 516-519, 1996.
- [105] Z.L. Horváth, J. Klebniczki, G. Kurdi and A.P. Kovács, *Experimental investigation of the boundary wave pulse*, Optics Commun., **239**, 243-250, (2004).
- [106] Z.L. Horváth, J. Klebniczki, G. Kurdi and A.P. Kovács, *Diffraction of short pulses with boundary diffraction wave theory*, Phys. Rev. E, **63**, 026601-1-026601-11, (2001).
- [107] Z.L. Horváth, J. Klebniczki, A. P. Kovács and G. Kurdi, *Observation of the boundary wave pulse*, Conference on Lasers and Electro-Optics Europe (2005).
- [108] M. Kempe and W. Rudolph, *Microscopy with Ultrashort Light Pulses*, Nonlinear Opt. **7**, pp. 129-151, (1994).
- [109] D. Zlvidea, *Phase mask for spatial and temporal control of ultrashort light pulses focused by lenses*, J. Opt. Soc. Am. A, **10** No. 10, pp. 1981- 1986, (2003).

-
- [110] M. Kempe, U. Stamm, B. Wilhemi and W. Rudolph; *Light distribution near focus in an error-free diffraction image*, Proceeding of the Royal Society of London, Series A, Mathematical and Physical Sciences, Vol. 20, pp.533-548, 1951.
- [111] Richard Barakat and Marie V. Morello; *Computation of the total illuminance (encircled energy) of an optical system from the design data for rotationally symmetric aberrations*, JOSA, Vol. 54, No. 2, pp. 235-240, 1964.
- [112] Pamela Bowlan, Ulrike Fuchs, Rick Trebino and Uwe D. Zeitner; *Measuring the spatiotemporal electric field of tightly focused ultrashort pulses with sub-micron spatial resolution*, OPTICS EXPRESS, Vol. 16, No. 18, pp. 13663, 2008.